Laboratorio CIDI

presso

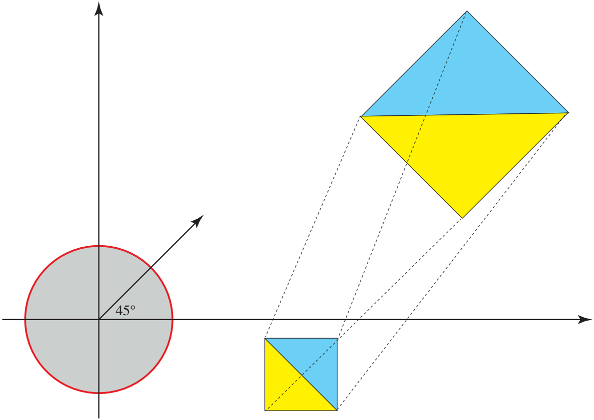
Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

1 aprile 2014

valerio.scorsipa@alice.it

la “realtà” dei numeri complessi

in una visione geometrica



premessa

I numeri complessi si possono affrontare didatticamente in molti modi: sono nodo concettuale connesso con diversi settori della matematica.

- partire dalla risoluzione di equazioni di II grado;

premessa

I numeri complessi si possono affrontare didatticamente in molti modi: sono nodo concettuale connesso con diversi settori della matematica.

- partire dalla risoluzione di equazioni di II grado;
- impostare la questione come spazio vettoriale;

premessa

I numeri complessi si possono affrontare didatticamente in molti modi: sono nodo concettuale connesso con diversi settori della matematica.

- partire dalla risoluzione di equazioni di II grado;
- impostare la questione come spazio vettoriale;
- concepire la forma trigonometrica e collegarsi alle formule della trigonometria e alle roto-omotetie, . . . ;

premessa

I numeri complessi si possono affrontare didatticamente in molti modi: sono nodo concettuale connesso con diversi settori della matematica.

- partire dalla risoluzione di equazioni di II grado;
- impostare la questione come spazio vettoriale;
- concepire la forma trigonometrica e collegarsi alle formule della trigonometria e alle roto-omotetie, ...;
- recuperare argomenti di carattere storico come la risoluzione delle equazioni cubiche, la ciclotomia;

premessa

I numeri complessi si possono affrontare didatticamente in molti modi: sono nodo concettuale connesso con diversi settori della matematica.

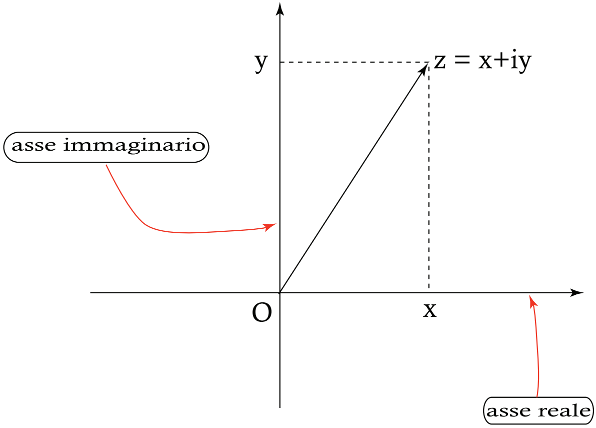
- partire dalla risoluzione di equazioni di II grado;
- impostare la questione come spazio vettoriale;
- concepire la forma trigonometrica e collegarsi alle formule della trigonometria e alle roto-omotetie, ...;
- recuperare argomenti di carattere storico come la risoluzione delle equazioni cubiche, la ciclotomia;
- provare la formula di Eulero $e^{\pi i} + 1 = 0$

premessa

I numeri complessi si possono affrontare didatticamente in molti modi: sono nodo concettuale connesso con diversi settori della matematica.

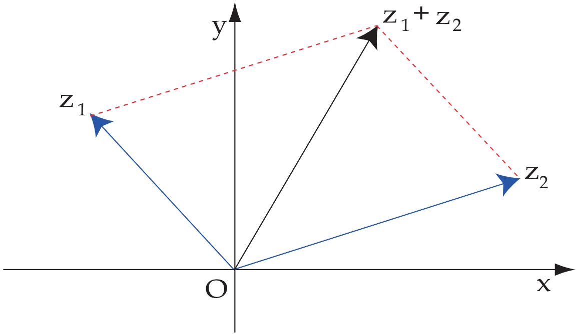
- partire dalla risoluzione di equazioni di II grado;
- impostare la questione come spazio vettoriale;
- concepire la forma trigonometrica e collegarsi alle formule della trigonometria e alle roto-omotetie, ...;
- recuperare argomenti di carattere storico come la risoluzione delle equazioni cubiche, la ciclotomia;
- provare la formula di Eulero $e^{\pi i} + 1 = 0$
- ecc.

un vettore in Oxy

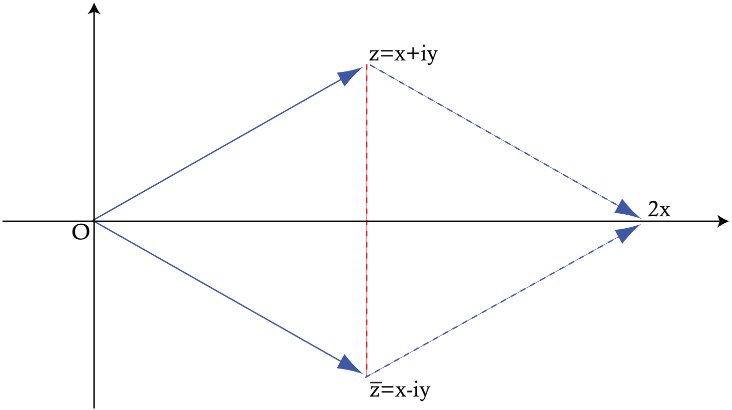


addizione in $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}^2$

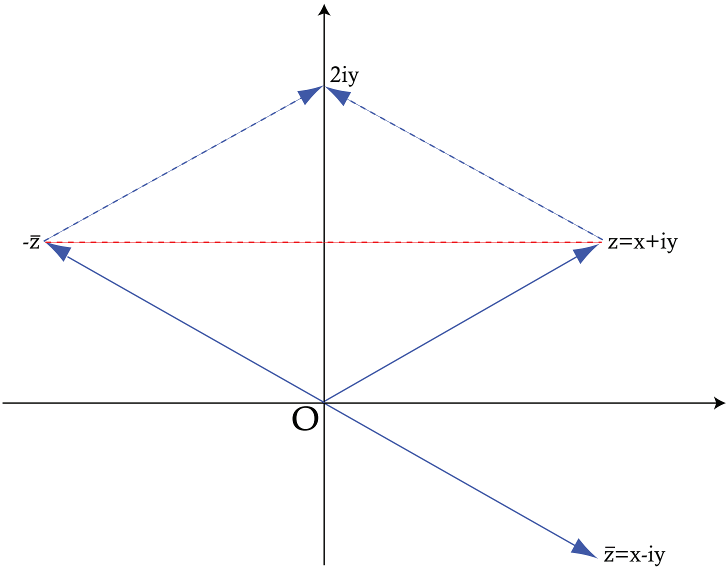
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$



numeri coniugati

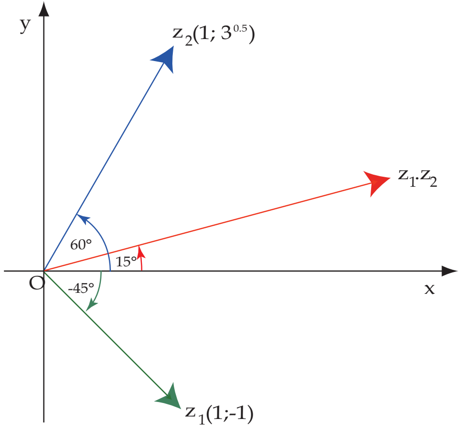


numeri coniugati



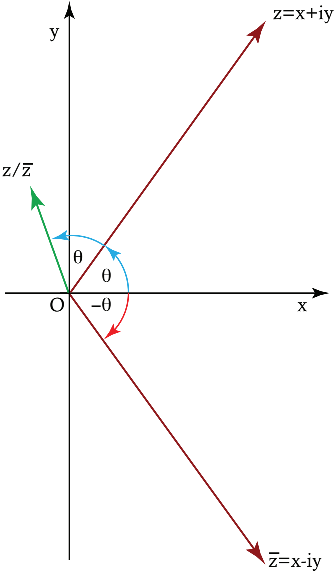
moltiplicazione in $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}^2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$$



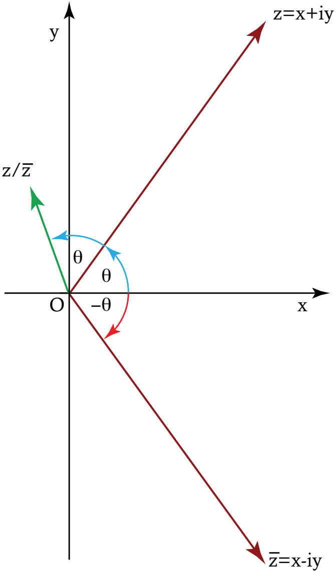
prodotto e quoto numeri coniugati

- $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$



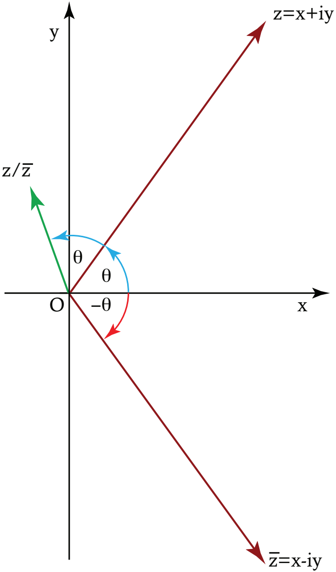
prodotto e quoto numeri coniugati

- $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$
- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

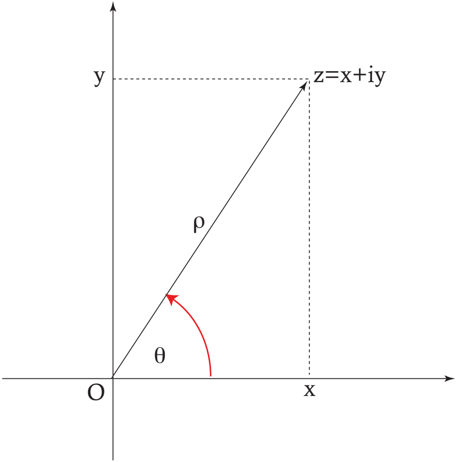


prodotto e quoto numeri coniugati

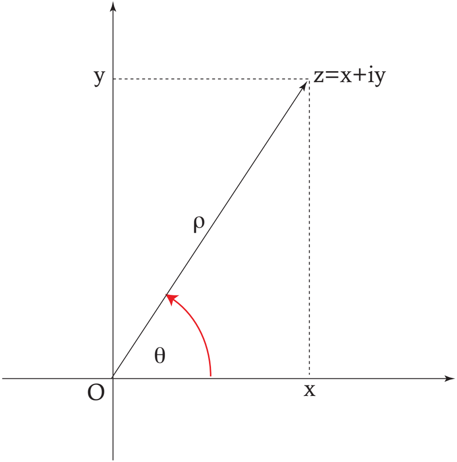
- $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$
- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
- $\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{z^2}{z \cdot \overline{z}}$



la forma trigonometrica



la forma trigonometrica



$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

in coordinate polari

$$z = (\rho, \theta + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$$

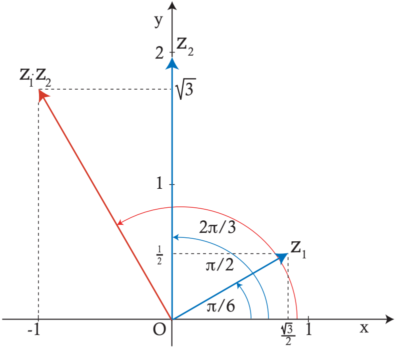
il prodotto, la potenza

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per $\boxed{\text{modulo}}$ il $\boxed{\text{prodotto dei moduli}}$ e per $\boxed{\text{argomento}}$ la $\boxed{\text{somma degli argomenti}}$ dei numeri dati.

cidi Perugia centroiniziativademocraticainsegnanti

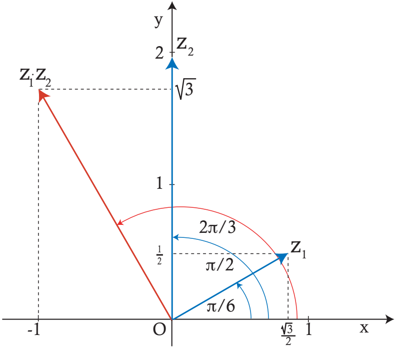
il prodotto, la potenza

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per $\boxed{\text{modulo}}$ il $\boxed{\text{prodotto dei moduli}}$ e per $\boxed{\text{argomento}}$ la $\boxed{\text{somma degli argomenti}}$ dei numeri dati.



il prodotto, la potenza

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei numeri dati.

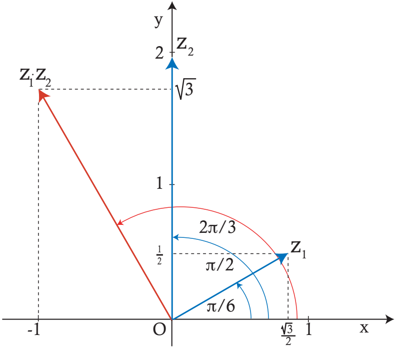


$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 =& \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
=& \rho_1\cdot\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
=& \rho_1\cdot\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)+\\
& +i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
=& \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}
$$

centro iniziativa democratica insegnanti Perugia

il prodotto, la potenza

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per $\boxed{\text{modulo}}$ il $\boxed{\text{prodotto dei moduli}}$ e per $\boxed{\text{argomento}}$ la $\boxed{\text{somma degli argomenti}}$ dei numeri dati.



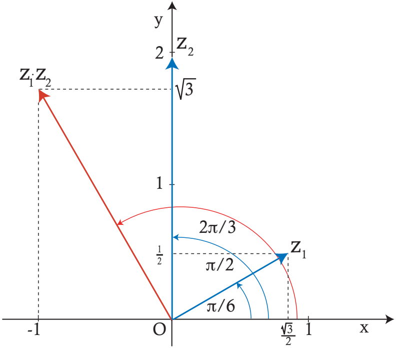
$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 =& \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
=& \rho_1\cdot\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
=& \rho_1\cdot\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)+\\
&+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
=& \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}
$$

È allora per il quadrato:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

il prodotto, la potenza

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per $\boxed{\text{modulo}}$ il $\boxed{\text{prodotto dei moduli}}$ e per $\boxed{\text{argomento}}$ la $\boxed{\text{somma degli argomenti}}$ dei numeri dati.



$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= \rho_1\cdot\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= \rho_1\cdot\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)+\\
&\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
&= \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}
$$

È allora per il quadrato:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

e con il P.I.M. si ha la formula di De Moivre

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

dalla potenza alla radice

dalla potenza alla radice

L'equazione $z^n = -1$ si può scrivere in forma trigonometrica:

$$z^n = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$$

dalla potenza alla radice

L'equazione $z^n = -1$ si può scrivere in forma trigonometrica:

$$z^n = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$$

e per la formula di De Moivre

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n}, \text{ con } k = 0, \dots, n-1$$

dalla potenza alla radice

L'equazione $z^n = -1$ si può scrivere in forma trigonometrica:

$$z^n = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$$

e per la formula di De Moivre

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n}, \text{ con } k = 0, \ldots, n-1$$

ovvero

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).$$

cidi Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

la ciclotomia

la ciclotomia

Le radici n-esime di

$$z = \rho(\cos\theta + \sin\theta)$$

sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e si ottengono grazie alla formula di De Moivre:

la ciclotomia

Le radici n-esime di

$$z = \rho(\cos\theta + \sin\theta)$$

sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e si ottengono grazie alla formula di De Moivre:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] \quad \text{con } k = 0, \dots, n-1.$$

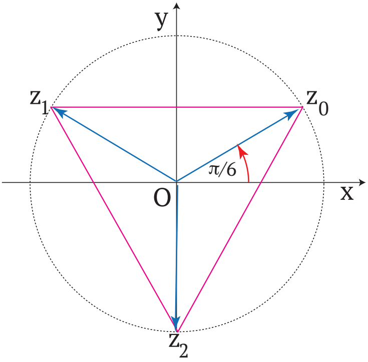
la ciclotomia

Le radici n-esime di

$$z = \rho(\cos\theta + \sin\theta)$$

sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e si ottengono grazie alla formula di De Moivre:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] \quad \text{con } k = 0, \ldots, n-1.$$



Le radici di $z^3 = i$

es.: risolvere $z^4 - i = 0$

es.: risolvere $z^4 - i = 0$

Si può scrivere

$$i = cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

perciò

es.: risolvere $z^4 - i = 0$

Si può scrivere

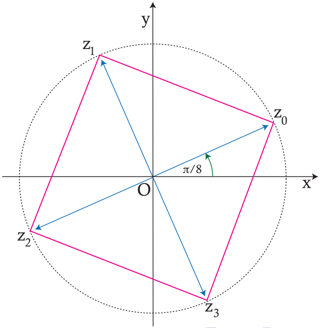
$$i = cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

perciò

$$z_k = \sqrt[4]{1}\cdot\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Si ottiene

- $z_0 = cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$;



es.: risolvere $z^4 - i = 0$

Si può scrivere

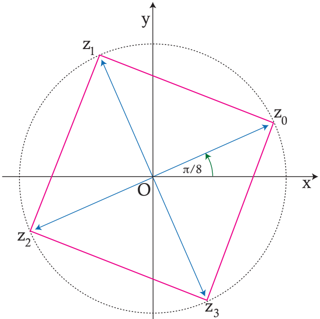
$$i = cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$$

perciò

$$z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left[\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Si ottiene

- $z_0 = cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}$;
- $z_1 = cos\frac{5}{8}\pi + i \sin\frac{5}{8}\pi$;



es.: risolvere $z^4 - i = 0$

Si può scrivere

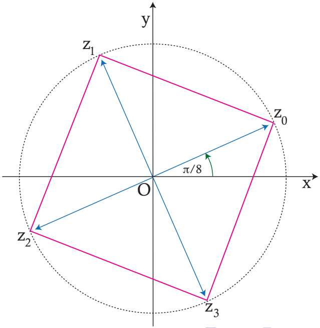
$$i = cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

perciò

$$z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left[\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Si ottiene

- $z_0 = cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$;
- $z_1 = cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi$;
- $z_2 = cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi$;



es.: risolvere $z^4 - i = 0$

Si può scrivere

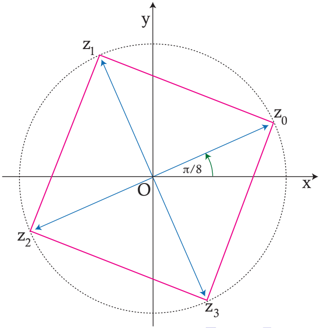
$$i = cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

perciò

$$z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left[\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Si ottiene

- $z_0 = cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$;
- $z_1 = cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi$;
- $z_2 = cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi$;
- $z_3 = cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi$.



roto-omotetie

roto-omotetie

Fissato un numero complesso $a = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ e indicato con $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ un qualsiasi numero complesso, l'applicazione

$$\boxed{\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}} \text{ tale che } \boxed{z \mapsto z' = a \cdot z}$$

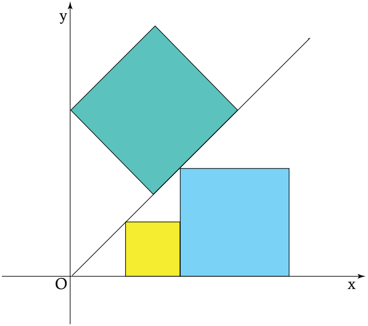
rappresenta una **roto-omotetia** del piano Oxy di centro O, di angolo θ_0 e di rapporto ρ_0.

roto-omotetie

Fissato un numero complesso $a = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ e indicato con $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ un qualsiasi numero complesso, l'applicazione

$$\boxed{\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}} \text{ tale che } \boxed{z \mapsto z' = a \cdot z}$$

rappresenta una **roto-omotetia** del piano Oxy di centro O, di angolo θ_0 e di rapporto ρ_0.



$$\boxed{\phi : z \mapsto z' = a \cdot z, \text{ con } a = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}$$

con scrittura matriciale

con scrittura matriciale

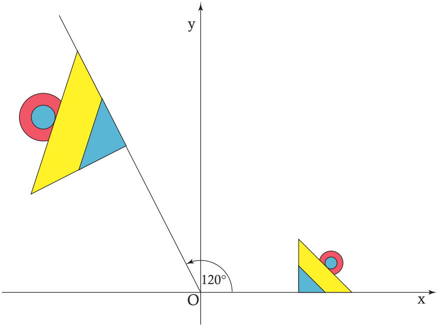
Siano $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ e $a = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$, la relazione $z' = a \cdot z$ diviene

$$x' + y'i = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(x + yi),$$

con scrittura matriciale

Siano $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ e $a = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$, la relazione $z' = a \cdot z$ diviene

$$x' + y'i = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(x + yi),$$

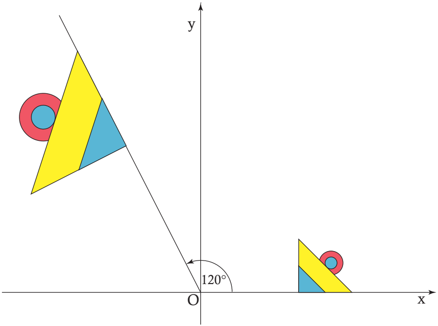


$$\boxed{z \mapsto (-1 + \sqrt{3}i) \cdot z}$$

con scrittura matriciale

Siano $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ e $a = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$, la relazione $z' = a \cdot z$ diviene

$$x' + y'i = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(x + yi),$$



$$\boxed{z \mapsto (-1 + \sqrt{3}i) \cdot z}$$

da cui:

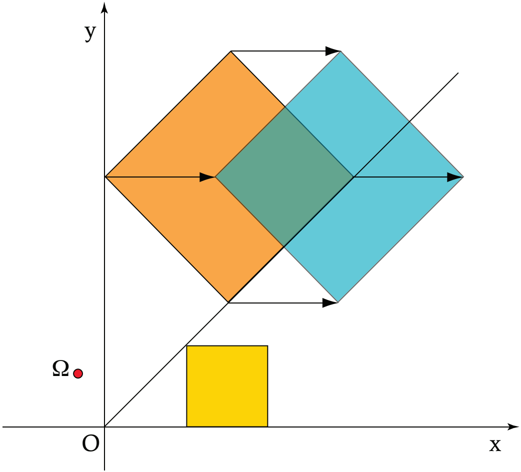
$$\begin{aligned} x' &= \rho_0(x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0) \\ y' &= \rho_0(x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0) \end{aligned}$$

e con scrittura matriciale:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

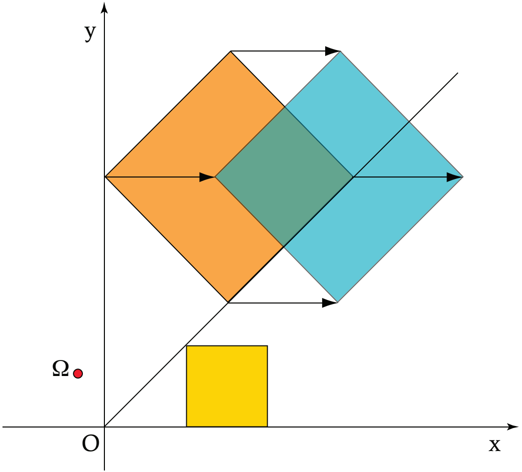
altra trasformazione

- L'applicazione $\varphi : z \mapsto az + b$ di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, con $a \neq 0$ e b numeri complessi, è ottenuta applicando $h : z \mapsto az$ e poi $\tau : z \mapsto z + b$.



altra trasformazione

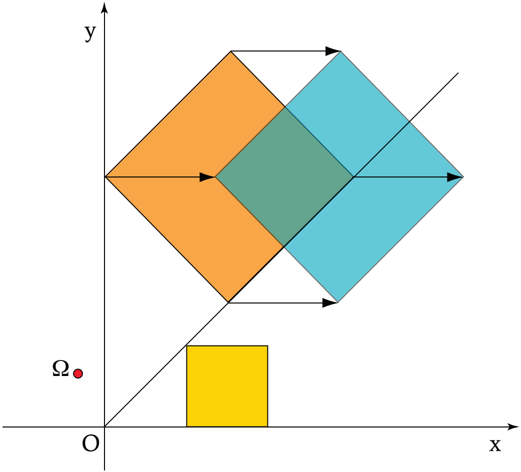
- φ è una similitudine diretta con unito il punto Ω, immagine del numero ω, per cui $\varphi(\omega) = a \cdot \omega + b = \omega$



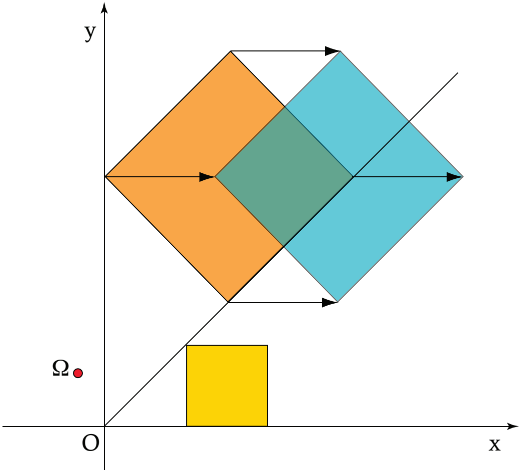
altra trasformazione

- di lì si ricava

$$\omega = \frac{b}{1-a}, \qquad \text{con } a \neq 1$$

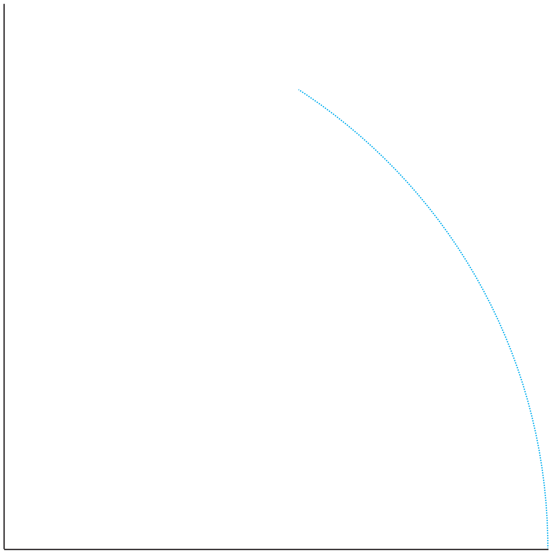


altra trasformazione

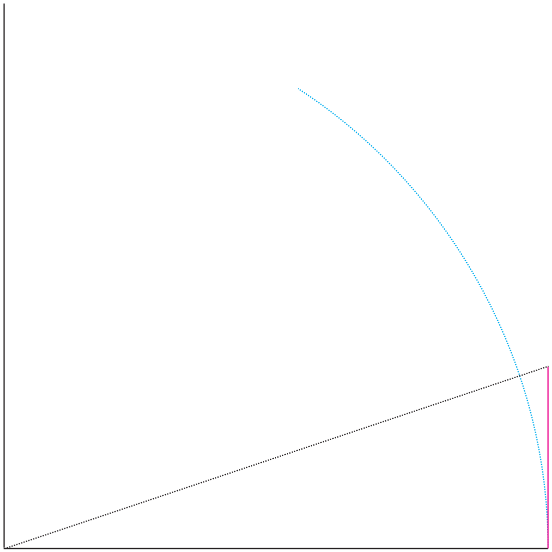


- con $a = 1$ il punto Ω "va" all'infinito e φ diventa una traslazione.

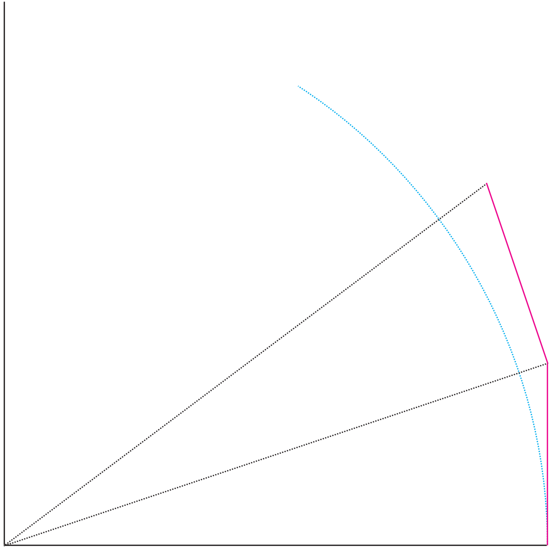
$\left(1+\frac{1}{3}i\right)^k$ con $k = 0$



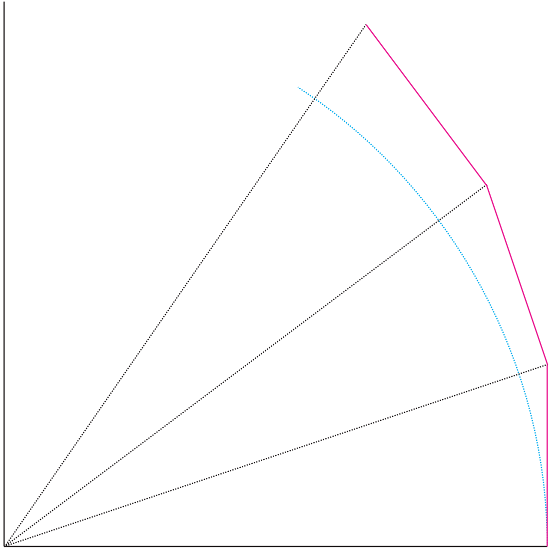
$\left(1+\frac{1}{3}i\right)^k$ con $k = 0, 1$



$\left(1+\frac{1}{3}i\right)^k$ con $k = 0, 1, 2$

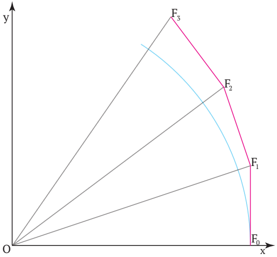


$\left(1+\frac{1}{3}i\right)^k$ con $k=0,1,2,3$



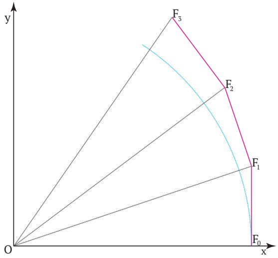
i ed e

- Le potenze $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ sono i vertici della spezzata $F_0F_1\ldots F_n$.



i ed e

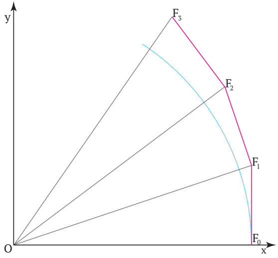
- Le potenze $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^k$ con $k=0,1,\dots,n$ sono i vertici della spezzata $F_0F_1\dots F_n$.



- F_kF_{k+1} sono i cateti degli n triangoli **simili** OF_kF_{k+1} retti in F_k.

i ed e

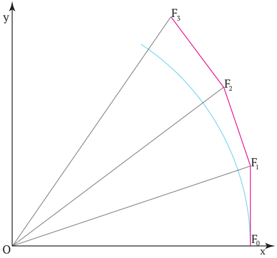
- Le potenze $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^k$ con $k=0,1,\dots,n$ sono i vertici della spezzata $F_0F_1\dots F_n$.



- F_kF_{k+1} sono i cateti degli n triangoli **simili** OF_kF_{k+1} retti in F_k.
- La roto-omotetia $z \mapsto (1+\frac{i}{n})\cdot z$ ruota di $\theta = \arctan\frac{1}{n}$ con $\rho = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$.

i ed e

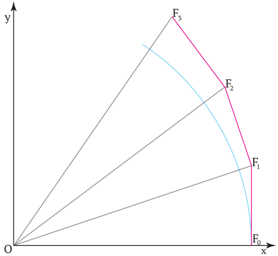
- Le potenze $\left(1 + \frac{1}{n}i\right)^k$ con $k = 0, 1, \ldots, n$ sono i vertici della spezzata $F_0 F_1 \ldots F_n$.



- $F_k F_{k+1}$ sono i cateti degli n triangoli **simili** $OF_k F_{k+1}$ retti in F_k.
- La roto-omotetia $z \mapsto (1 + \frac{i}{n}) \cdot z$ ruota di $\theta = \arctan \frac{1}{n}$ con $\rho = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$.
- Per $n \to \infty$

i ed e

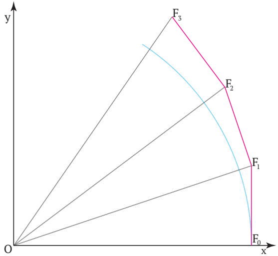
- Le potenze $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ sono i vertici della spezzata $F_0F_1\ldots F_n$.



- F_kF_{k+1} sono i cateti degli n triangoli **simili** OF_kF_{k+1} retti in F_k.
- La roto-omotetia $z \mapsto (1+\frac{i}{n})\cdot z$ ruota di $\theta = \arctan\frac{1}{n}$ con $\rho = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$.
- Per $n \to \infty$
  1. $\boxed{\arctan\frac{1}{n} \to \frac{1}{n}}$;

i ed e

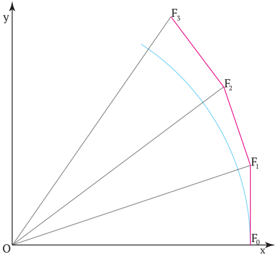
- Le potenze $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ sono i vertici della spezzata $F_0F_1\ldots F_n$.



- F_kF_{k+1} sono i cateti degli n triangoli **simili** OF_kF_{k+1} retti in F_k.
- La roto-omotetia $z \mapsto (1+\frac{i}{n})\cdot z$ ruota di $\theta = \arctan\frac{1}{n}$ con $\rho = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$.
- Per $n \to \infty$
  1. $\boxed{\arctan\frac{1}{n} \to \frac{1}{n}}$;
  2. la misura di $F_0\widehat{O}F_n$, $\boxed{n\arctan\frac{1}{n} \to 1 rad}$ e $\boxed{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{n}{2}} \to 1}$;

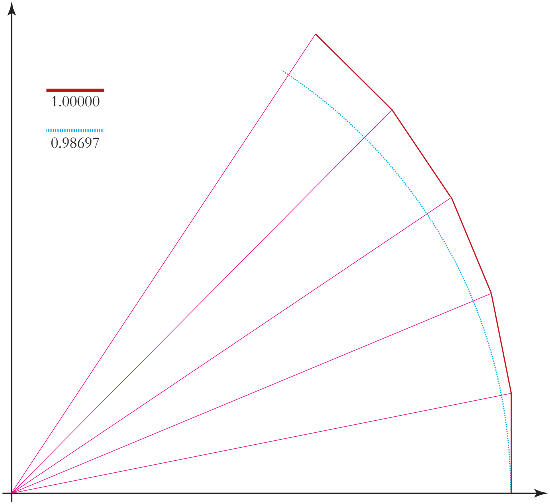
i ed e

- Le potenze $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^k$ con $k = 0, 1, \ldots, n$ sono i vertici della spezzata $F_0F_1\ldots F_n$.

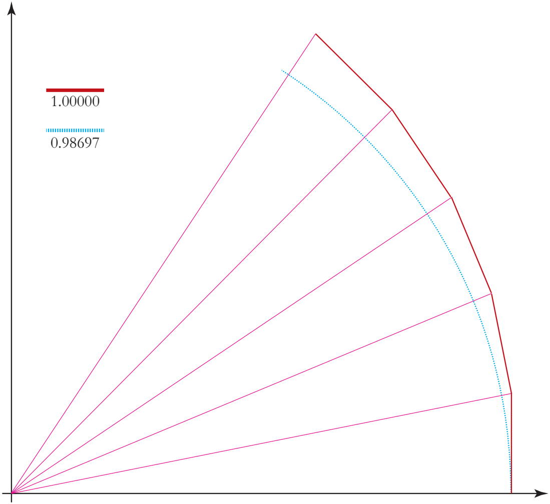


- F_kF_{k+1} sono i cateti degli n triangoli **simili** OF_kF_{k+1} retti in F_k.
- La roto-omotetia $z \mapsto (1+\frac{i}{n}) \cdot z$ ruota di $\theta = \arctan\frac{1}{n}$ con $\rho = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$.
- Per $n \to \infty$
  1. $\boxed{\arctan\frac{1}{n} \to \frac{1}{n}}$;
  2. la misura di $F_0\widehat{O}F_n$, $\boxed{n\arctan\frac{1}{n} \to 1rad}$ e $\boxed{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{n}{2}} \to 1}$;
  3. la $\boxed{\text{spezzata } F_0F_1\ldots F_n \to \text{arco di cerchio di estremi } F_0 \text{ e } \cos 1 + i\sin 1}$.

una stessa roto-omotetia ripetuta



una stessa roto-omotetia ripetuta



k	$k \arctan \frac{1}{k}$
1	0.78539
2	0.92729
3	0.96525
4	0.97904
5	0.98697
...	...
∞	1.00000

i magnifici cinque

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \cos 1 + i\sin 1$

i magnifici cinque

- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = \cos 1 + i \sin 1$
- per analogia con il II limite fondamentale $\boxed{\cos 1 + i \sin 1 = e^i}$

i magnifici cinque

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \cos 1 + i\sin 1$
- per analogia con il II limite fondamentale $\boxed{\cos 1 + i\sin 1 = e^i}$
- dalla def. ora data e dalla formula di De Moivre $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = (\cos 1 + i\sin 1)^\theta}$

  discende la formula di Eulero, $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}}$

i magnifici cinque

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \cos 1 + i\sin 1$
- per analogia con il II limite fondamentale $\boxed{\cos 1 + i\sin 1 = e^i}$
- dalla def. ora data e dalla formula di De Moivre $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = (\cos 1 + i\sin 1)^\theta}$

  discende la formula di Eulero, $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}}$
- più in generale $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si può scrivere $\boxed{z = \rho\cdot e^{\theta i}}$

i magnifici cinque

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \cos 1 + i\sin 1$
- per analogia con il II limite fondamentale $\boxed{\cos 1 + i\sin 1 = e^i}$
- dalla def. ora data e dalla formula di De Moivre $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = (\cos 1 + i\sin 1)^\theta}$

  discende la formula di Eulero, $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}}$
- più in generale $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si può scrivere $\boxed{z = \rho\cdot e^{\theta i}}$
- la relazione fra le cinque costanti $\boxed{0, 1, \pi, e, i}$ più importanti in matematica

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0.}$$