Per una Matematica di Qualità

Laboratorio CIDI

presso

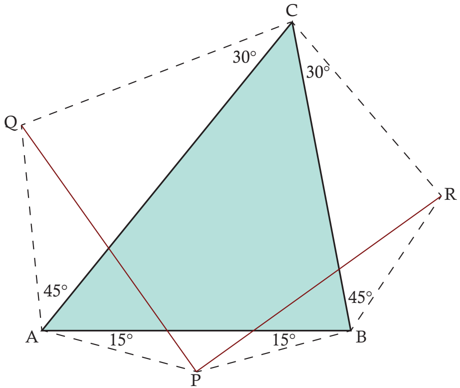
Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

5 febbraio 2014

Per una Matematica di Qualità

Questo breve corso non intende essere un aggiornamento eterodiretto, ma piuttosto l'ipotesi di un laboratorio, da intendere in senso lato, nel quale degli insegnanti riescano a condividere l'impostazione didattica attraverso la ricerca condotta su alcune questioni attinenti alla matematica, alla costruzione e valutazione del curricolo, ma in ogni caso alla luce della dimensione cognitivo-emotiva.

Per una Matematica di Qualità



Perchè l'angolo $R\widehat{P}Q$ è sempre retto?

Problem solving e posing

Insegnamento di Qualità?

Problem solving e posing

Insegnamento di Qualità?

- Impostare l'insegnamento come ricerca porta risultati inattesi.

Problem solving e posing

Insegnamento di Qualità?

- Impostare l'insegnamento come ricerca porta risultati inattesi.
- Vincere il timore di percorrere nuove strade.

Problem solving e posing

Insegnamento di Qualità?

- Impostare l'insegnamento come ricerca porta risultati inattesi.
- Vincere il timore di percorrere nuove strade.
- Lasciarsi andare alla deriva e rintracciare i fili di una trattazione teorica.

Problem solving e posing

Insegnamento di Qualità?

- Impostare l'insegnamento come ricerca porta risultati inattesi.
- Vincere il timore di percorrere nuove strade.
- Lasciarsi andare alla deriva e rintracciare i fili di una trattazione teorica.
- Stimolare la curiosità degli alunni con domande "E se. . . ?"

Problem solving e posing

Insegnamento di Qualità?

- Impostare l'insegnamento come ricerca porta risultati inattesi.
- Vincere il timore di percorrere nuove strade.
- Lasciarsi andare alla deriva e rintracciare i fili di una trattazione teorica.
- Stimolare la curiosità degli alunni con domande "E se. . . ?"
- . . .

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata

della somma

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata

della somma

dei quadrati

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata

della somma

dei quadrati

delle differenze

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata

della somma

dei quadrati

delle differenze

delle coord. omonime

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata $\longleftrightarrow$

della somma $\longleftrightarrow$

dei quadrati $\longleftrightarrow$

delle differenze $\longleftrightarrow$

delle coord. omonime $\longleftrightarrow$

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$
della somma	$\longleftrightarrow$	
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	
delle differenze	$\longleftrightarrow$	
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$ $\downarrow$
della somma	$\longleftrightarrow$	
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	
delle differenze	$\longleftrightarrow$	
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$ $\downarrow$
della somma	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	
delle differenze	$\longleftrightarrow$	
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$
		$\downarrow$
della somma	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
		$\swarrow \qquad \searrow$
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	
delle differenze	$\longleftrightarrow$	
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$
della somma	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	$\cdot^2 \qquad \cdot^2$
delle differenze	$\longleftrightarrow$	
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

$$\begin{tikzcd} & \sqrt{\cdot} \arrow[d] & \\ & \oplus \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \cdot^2 & & \cdot^2 \end{tikzcd}$$

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$
della somma	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	$\cdot^2 \qquad \cdot^2$
delle differenze	$\longleftrightarrow$	
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

$$\begin{tikzcd}
 & \sqrt{\cdot} \arrow[d] & \\
 & \oplus \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\cdot^2 \arrow[d] & & \cdot^2 \arrow[d] \\
{} & & {}
\end{tikzcd}$$

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata $\longleftrightarrow$

della somma $\longleftrightarrow$

dei quadrati $\longleftrightarrow$

delle differenze $\longleftrightarrow$

delle coord. omonime $\longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \sqrt{\cdot} \arrow[d] & \\
 & \oplus \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\cdot^2 \arrow[d] & & \cdot^2 \arrow[d] \\
\ominus & & \ominus
\end{tikzcd}$$

Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$
		$\downarrow$
della somma	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
		$\swarrow \qquad \searrow$
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	$\cdot^2 \qquad \cdot^2$
		$\downarrow \qquad \downarrow$
delle differenze	$\longleftrightarrow$	$\ominus \qquad \ominus$
		$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	

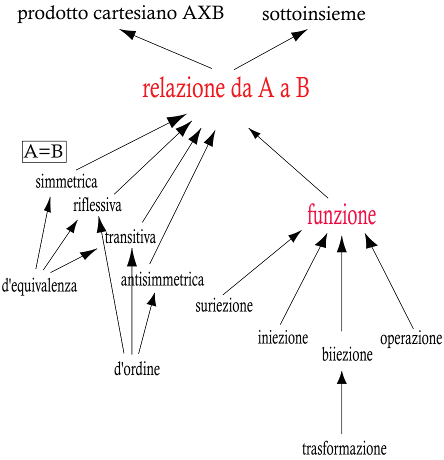
Linguaggi a confronto

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la radice quadrata	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\cdot}$
		$\downarrow$
della somma	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
		$\swarrow \quad \searrow$
dei quadrati	$\longleftrightarrow$	$\cdot^2 \qquad \cdot^2$
		$\downarrow \qquad \downarrow$
delle differenze	$\longleftrightarrow$	$\ominus \qquad \ominus$
		$\swarrow \ \searrow \qquad \swarrow \ \searrow$
delle coord. omonime	$\longleftrightarrow$	$x_1 \quad x_2 \quad y_1 \quad y_2$

È importante stabilire e mostrare gerarchie concettuali: grazie ad esse i concetti si consolidano, si collegano, si apprendono secondo modalità proprie della memoria umana.

È importante stabilire e mostrare gerarchie concettuali: grazie ad esse i concetti si consolidano, si collegano, si apprendono secondo modalità proprie della memoria umana.



Quadrilateri convessi

Quadrilateri convessi

$\uparrow$

Trapezi

Quadrilateri convessi

$\uparrow$

Trapezi

$\uparrow$

Parallelogrammi

Quadrilateri convessi

$\uparrow$

Trapezi

$\uparrow$

Parallelogrammi

$\nearrow$ $\nwarrow$

Rombi Rettangoli

Quadrilateri convessi

$\uparrow$

Trapezi

$\uparrow$

Parallelogrammi

$\nearrow$ $\nwarrow$

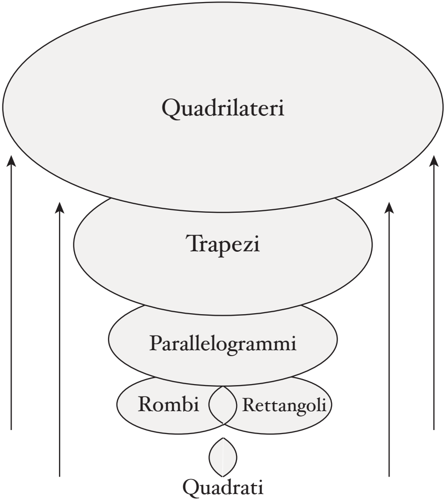
Rombi Rettangoli

$\nwarrow$ $\nearrow$

Quadrati

- I concetti-genitori includono i concetti-figli.
- Andando verso il basso le definizioni dei quadrilateri si “specializzano” per qualche proprietà’.
- I quadrati sono ovviamente i più “esclusivi”.
- Anche in questo modo si vede bene la gerarchia. . .

- I concetti-genitori includono i concetti-figli.
- Andando verso il basso le definizioni dei quadrilateri si “specializzano” per qualche proprietà’.
- I quadrati sono ovviamente i più “esclusivi”.
- Anche in questo modo si vede bene la gerarchia. . .



Due montagne

Il profilo delle vette di Puntor è costituito da due triangoli isosceli $A\widehat{B}V_1$ e $B\widehat{C}V_2$ di basi AB, BC, con B punto medio di AC. Sappiamo che AC è lungo 4572 metri e che V_1 e V_2 distano rispettivamente 8001 e 3429 metri da AC.
A quanto ammonta il valore assoluto della differenza $V_2\widehat{A}V_1 - B\widehat{V_2}C$?

Due montagne

Il profilo delle vette di Puntor è costituito da due triangoli isosceli $A\widehat{B}V_1$ e $B\widehat{C}V_2$ di basi AB, BC, con B punto medio di AC. Sappiamo che AC è lungo 4572 metri e che V_1 e V_2 distano rispettivamente 8001 e 3429 metri da AC.
A quanto ammonta il valore assoluto della differenza $V_2\widehat{A}V_1 - B\widehat{V_2}C$?

Occorre una figura che rappresenti in scala le dimensioni date ...

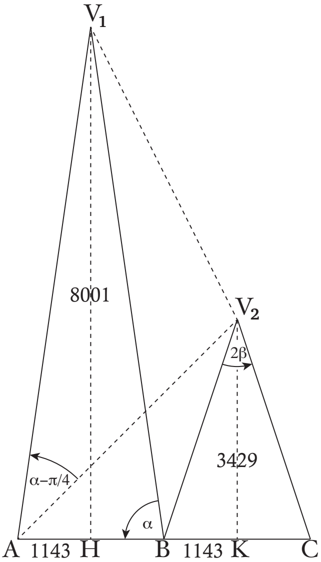
centro iniziativa democratica insegnanti Perugia

Due montagne

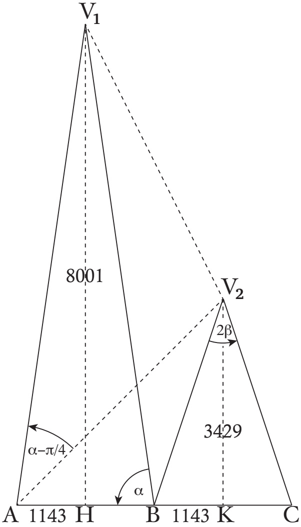
La figura

Due montagne

La figura

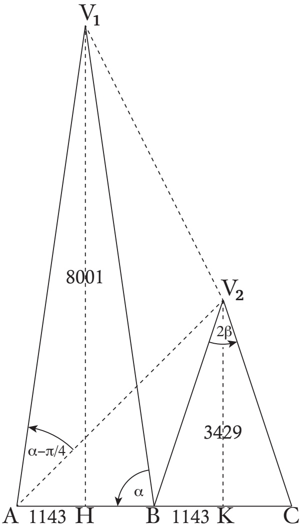


Due montagne



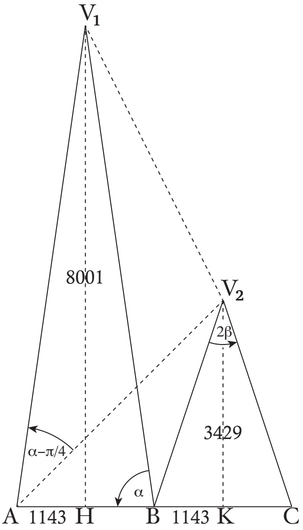
La quarta parte di AC è 1143 ed è sottomultiplo di 8001 e di 3429 secondo i numeri 7 e 3.
Il triangolo rettangolo AKV_2 è perciò isoscele e, considerati i triangoli rettangoli AV_1H e BV_2K, si ha:

Due montagne



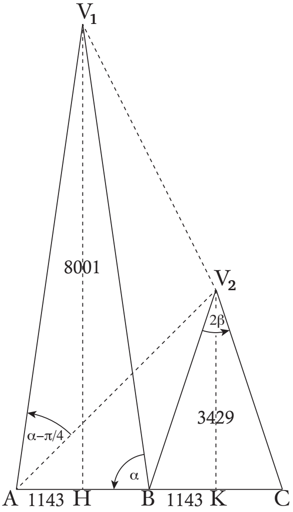
La quarta parte di AC è 1143 ed è sottomultiplo di 8001 e di 3429 secondo i numeri 7 e 3.
Il triangolo rettangolo AKV_2 è perciò isoscele e, considerati i triangoli rettangoli AV_1H e BV_2K, si ha:
$\tan\alpha = 7$,

Due montagne



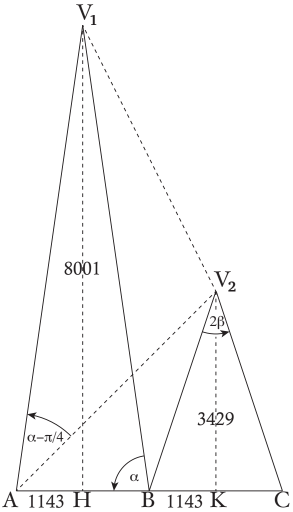
La quarta parte di AC è 1143 ed è sottomultiplo di 8001 e di 3429 secondo i numeri 7 e 3.
Il triangolo rettangolo AKV_2 è perciò isoscele e, considerati i triangoli rettangoli AV_1H e BV_2K, si ha:
$\tan\alpha = 7$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$.

Due montagne



Ne segue facilmente, considerando le formule di sottrazione e di duplicazione della tangente, che

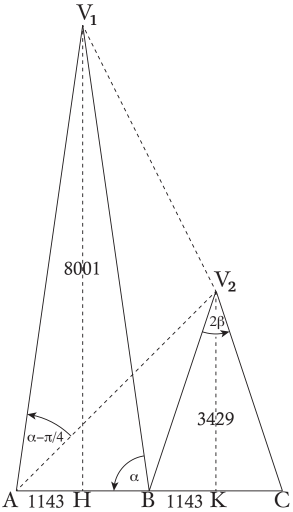
Due montagne



Ne segue facilmente, considerando le formule di sottrazione e di duplicazione della tangente, che

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{7-1}{1+7} = \frac{3}{4}$$

Due montagne

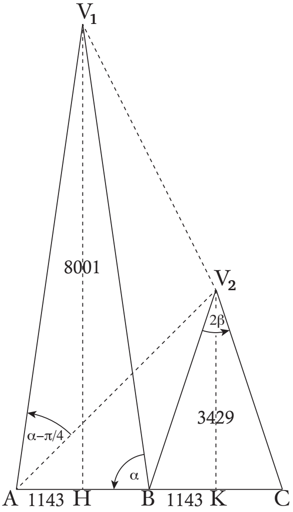


Ne segue facilmente, considerando le formule di sottrazione e di duplicazione della tangente, che

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{7-1}{1+7} = \frac{3}{4}$$

$$\tan(2\beta) = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

Due montagne



Ne segue facilmente, considerando le formule di sottrazione e di duplicazione della tangente, che

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{7-1}{1+7} = \frac{3}{4}$$

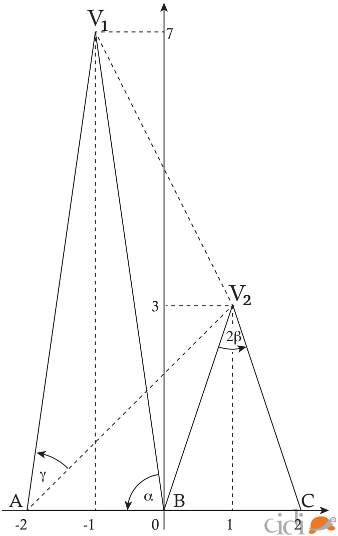
$$\tan(2\beta) = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

e perciò che $\alpha - \frac{\pi}{4} = 2\beta$.

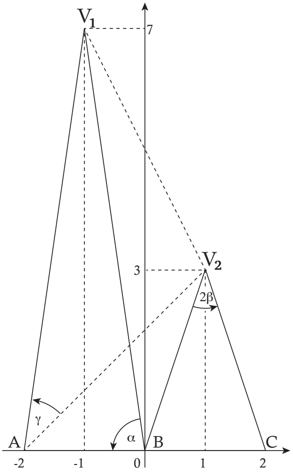
$V_2 \widehat{A} V_1 - B \widehat{V}_2 C$ è l'angolo nullo.

Due montagne "cartesianizzate"

In un sistema di riferimento, sono stati attribuiti ai punti della figura, come coordinate, i rapporti dei segmenti con la quarta parte di AC.

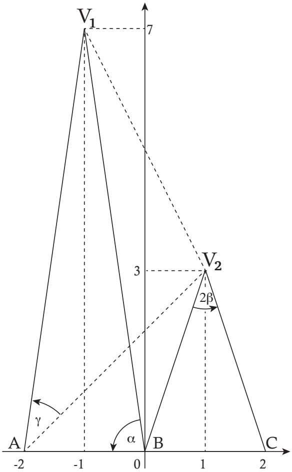


Due montagne “cartesianizzate”



Per il teor. di Carnot si ha:

Due montagne "cartesianizzate"



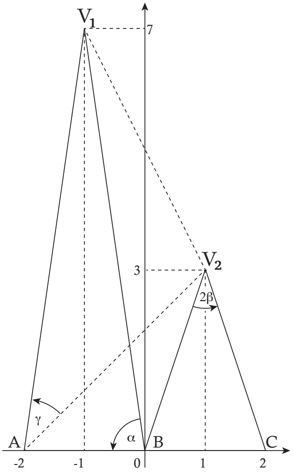
Per il teor. di Carnot si ha:

$$\overline{AV_1}^2 + \overline{AV_2}^2 - 2 \cdot \overline{AV_1} \cdot \overline{AV_2} \cos\gamma = \overline{V_1 V_2}^2$$

$$50 + 18 - 2 \cdot 30 \cos\gamma = 20$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{5}$$

Due montagne “cartesianizzate”



Per il teor. di Carnot si ha:

$$\overline{AV_1}^2 + \overline{AV_2}^2 - 2 \cdot \overline{AV_1} \cdot \overline{AV_2} \cos\gamma = \overline{V_1\,V_2}^2$$

$$50 + 18 - 2 \cdot 30 \cos\gamma = 20$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{5}$$

e

$$\overline{BV_2}^2 + \overline{CV_2}^2 - 2 \cdot \overline{BV_2} \cdot \overline{CV_2} \cos 2\beta = \overline{BC}^2$$

$$10 + 10 - 2 \cdot 10 cos 2\beta = 4$$

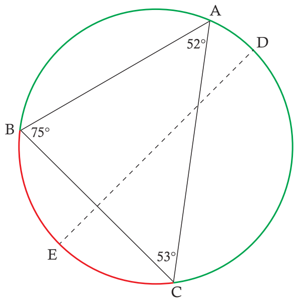
$$\cos 2\beta = \frac{4}{5}$$

Punti di vista

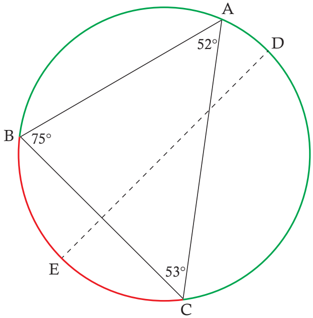
Sia ABC un triangolo con $A\widehat{B}C = 75°$ e $A\widehat{C}B = 53°$. Disegnata la circonferenza circoscritta, siano E il punto medio dell'arco BC che non contiene A, e D il punto medio dell'arco BC contenente A. Quanto misura l'angolo $A\widehat{E}D$?

Punti di vista

Sia ABC un triangolo con $A\widehat{B}C = 75°$ e $A\widehat{C}B = 53°$. Disegnata la circonferenza circoscritta, siano E il punto medio dell'arco BC che non contiene A, e D il punto medio dell'arco BC contenente A. Quanto misura l'angolo $A\widehat{E}D$?

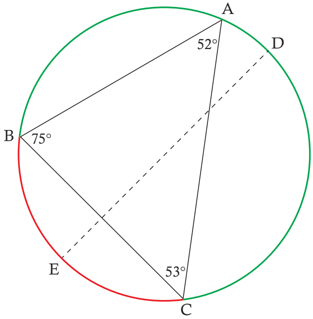


Punti di vista



da. . .

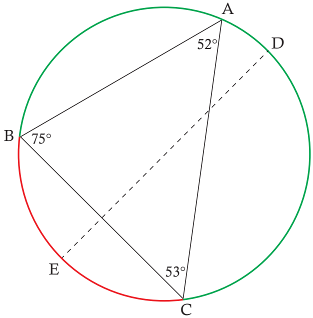
Punti di vista



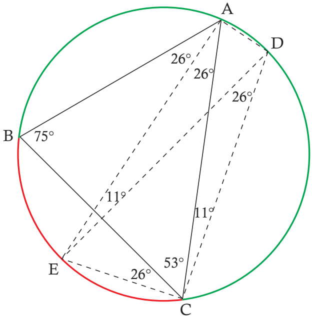
a. . .

da. . .

Punti di vista



da. . .



a. . .

successione ricorsiva

Un gioco consiste nel determinare un numero $\boxed{\text{intero } x}$ in modo da ottenere il maggior numero di termini $\boxed{\text{positivi}}$ della successione:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= 1000 \\ a_2 &= x \\ a_3 &= a_1 - a_2 \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} - a_{n-2}. \end{aligned}}$$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$
a_5	$2000 - 3x$	$x < \frac{2000}{3} \approx 666,66$	$500 < x < 667$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$
a_5	$2000 - 3x$	$x < \frac{2000}{3} \approx 666,66$	$500 < x < 667$
a_6	$5x - 3000$	$x > 600$	$600 < x < 667$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$
a_5	$2000 - 3x$	$x < \frac{2000}{3} \approx 666,66$	$500 < x < 667$
a_6	$5x - 3000$	$x > 600$	$600 < x < 667$
a_7	$5000 - 8x$	$x < \frac{5000}{8} = 625$	$600 < x < 625$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$
a_5	$2000 - 3x$	$x < \frac{2000}{3} \approx 666,66$	$500 < x < 667$
a_6	$5x - 3000$	$x > 600$	$600 < x < 667$
a_7	$5000 - 8x$	$x < \frac{5000}{8} = 625$	$600 < x < 625$
a_8	$13x - 8000$	$x > \frac{8000}{13} \approx 615,38$	$615 < x < 625$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$
a_5	$2000 - 3x$	$x < \frac{2000}{3} \approx 666,66$	$500 < x < 667$
a_6	$5x - 3000$	$x > 600$	$600 < x < 667$
a_7	$5000 - 8x$	$x < \frac{5000}{8} = 625$	$600 < x < 625$
a_8	$13x - 8000$	$x > \frac{8000}{13} \approx 615,38$	$615 < x < 625$
a_9	$13000 - 21x$	$x < \frac{13000}{21} \approx 619,047$	$615 < x < 619$

successione ricorsiva

È importante osservare i vincoli e il modo in cui si generano i termini della successione come illustra la tabella sottostante:

n	a_n	$a_n > 0$	limitazioni
a_1	1000	$1000 > 0$	
a_2	x	$x > 0$	
a_3	$1000 - x$	$x < 1000$	$0 < x < 1000$
a_4	$2x - 1000$	$x > 500$	$500 < x < 1000$
a_5	$2000 - 3x$	$x < \frac{2000}{3} \approx 666,66$	$500 < x < 667$
a_6	$5x - 3000$	$x > 600$	$600 < x < 667$
a_7	$5000 - 8x$	$x < \frac{5000}{8} = 625$	$600 < x < 625$
a_8	$13x - 8000$	$x > \frac{8000}{13} \approx 615,38$	$615 < x < 625$
a_9	$13000 - 21x$	$x < \frac{13000}{21} \approx 619,047$	$615 < x < 619$
a_{10}	$34x - 21000$	$x > \frac{21000}{34} \approx 617,647$	$617 < x < 619$

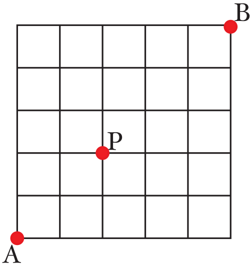
cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

un reticolo di cammini

È data una griglia 5×5. Si vuol andare dal punto $A(0;0)$ al punto $B(5;5)$ facendo il minor numero di "passi" possibile, ma senza passare dal punto $P(2;2)$. In quanti modi è possibile?

un reticolo di cammini

È data una griglia 5×5. Si vuol andare dal punto $A(0;0)$ al punto $B(5;5)$ facendo il minor numero di "passi" possibile, ma senza passare dal punto $P(2;2)$. In quanti modi è possibile?

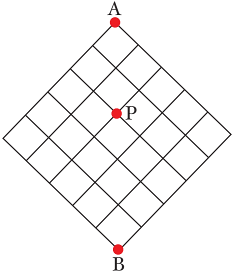


un reticolo di cammini

Ruotando la griglia in senso orario di $135°$ intorno al punto A, l'esercizio richiama il triangolo di Tartaglia

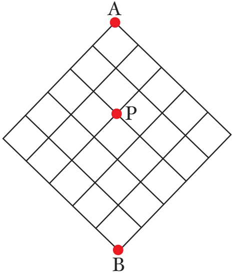
un reticolo di cammini

Ruotando la griglia in senso orario di 135° intorno al punto A, l'esercizio richiama il triangolo di Tartaglia



un reticolo di cammini

Ruotando la griglia in senso orario di 135° intorno al punto A, l'esercizio richiama il triangolo di Tartaglia



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 **6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

un reticolo di cammini

Il noto procedimento che genera il triangolo di Tartaglia s'interrompe in corrispondenza del punto $P(2;2)$ dove si trova il 6 nella quarta riga a partire dell'alto, due $\boxed{4}$ sostituiscono allora i 10 della riga successiva e il triangolo, adattato alla griglia 5×5, si modifica così

un reticolo di cammini

Il noto procedimento che genera il triangolo di Tartaglia s'interrompe in corrispondenza del punto $P(2;2)$ dove si trova il 6 nella quarta riga a partire dell'alto, due $\boxed{4}$ sostituiscono allora i 10 della riga successiva e il triangolo, adattato alla griglia 5×5, si modifica così

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & \spadesuit & & 4 & & 1
\end{array}$$

un reticolo di cammini

Il noto procedimento che genera il triangolo di Tartaglia s'interrompe in corrispondenza del punto $P(2;2)$ dove si trova il 6 nella quarta riga a partire dell'alto, due $\boxed{4}$ sostituiscono allora i 10 della riga successiva e il triangolo, adattato alla griglia 5×5, si modifica così

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \spadesuit & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{4} & & \boxed{4} & & 5 & & 1
\end{array}
$$

un reticolo di cammini

Il noto procedimento che genera il triangolo di Tartaglia s'interrompe in corrispondenza del punto $P(2;2)$ dove si trova il 6 nella quarta riga a partire dell'alto, due $\boxed{4}$ sostituiscono allora i 10 della riga successiva e il triangolo, adattato alla griglia 5×5, si modifica così

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 ♠ 4 1

1 5 $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ 5 1

6 9 8 9 6

15 17 17 15

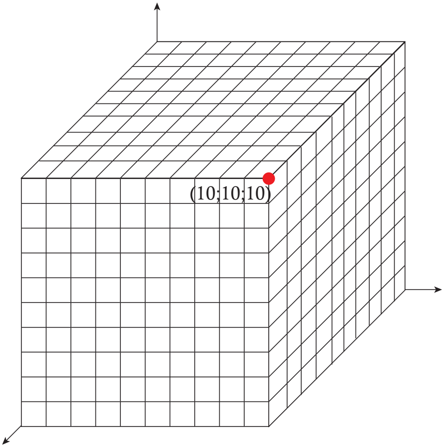
32 34 32

66 66

$\boxed{132}$

Se si considera nello spazio l'insieme Q dei punti che hanno coordinate intere comprese tra 0 e 10 (inclusi), quanti cubi esistono con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e con i vertici appartenenti a Q?

Se si considera nello spazio l'insieme Q dei punti che hanno coordinate intere comprese tra 0 e 10 (inclusi), quanti cubi esistono con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e con i vertici appartenenti a Q?

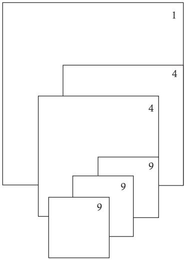


per piccoli passi

Conviene procedere per gradi, partendo da casi relativi a numeri piccoli.
Prendiamo in esame gli intervalli di interi $[0,1], [0,2], [0,3]$.
Nel primo caso il numero dei cubi è 1,
nel secondo $1 + 8 = 9$,
nel terzo (vedi figura) $1 + 8 + 27 = 36$.

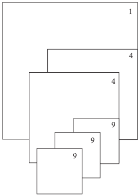
per piccoli passi

Conviene procedere per gradi, partendo da casi relativi a numeri piccoli.
Prendiamo in esame gli intervalli di interi $[0,1], [0,2], [0,3]$.
Nel primo caso il numero dei cubi è 1,
nel secondo $1+8=9$,
nel terzo (vedi figura) $1+8+27=36$.



per piccoli passi

Da questa prima indagine si nota che il numero dei cubi è la somma dei primi n cubi, dove n rappresenta l'estremo superiore dell'intervallo di interi $[0, n]$.
Nel caso in questione allora il numero dei cubi è dato da:



$$1 + 8 + \cdots + 729 + 1000 = 1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 + 10^3.$$

per piccoli passi

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
1^3 &= 1^2; \\
1^3 + 2^3 &= (1+2)^2; \\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1+2+3)^2; \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1+2+3+4)^2
\end{aligned}
$$

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

per piccoli passi

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
1^3 &= 1^2; \\
1^3 + 2^3 &= (1+2)^2; \\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1+2+3)^2; \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1+2+3+4)^2
\end{aligned}
$$

Si può allora generalizzare e porre:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 + 10^3 = (1 + 2 + \cdots + 9 + 10)^2$$

per piccoli passi

Poiché

$$\begin{aligned} S_n =& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ S_n =& n + (n-1) + \ldots 2 + 1 \end{aligned}$$

sommando "per colonne" si ha

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

per piccoli passi

Poiché

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + \ldots 2 + 1$$

sommando "per colonne" si ha

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Concludendo:

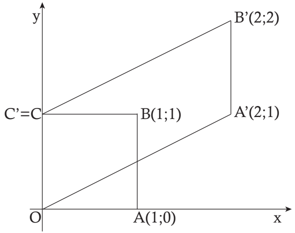
$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 + 10^3 &= (1 + 2 + \cdots + 9 + 10)^2 \\ &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 \\ &= 3025 \end{aligned}$$

per discutere 1-2

- Trovare il più piccolo intero positivo n tale che la sua ultima cifra è 6, e che spostando quel 6 all'inizio del numero (es.: 496 $\rightarrow$ 649), otteniamo $4n$ (IMO 1962/1).
- I quadrilateri $OABC$ e $O'A'B'C'$ della figura si corrispondono nella trasformazione geometrica φ:

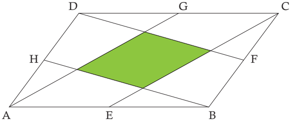
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Quali sono i coefficienti a, b, c, d?

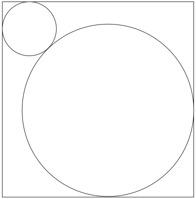


per discutere 3-4

- Un terreno di $12.600m^2$ ha la forma di un parallelogramma $ABCD$. Per un allevamento di trote il proprietario vuole realizzare un laghetto, che ha come perimetro il quadrilatero intersezione dei segmenti AG, BH, CE, e DF, dove E, F, G, H sono i punti medi di AB, BC, CD, e DE. Quale superficie occuperà il laghetto?



- Un pianoro ha la forma di un rettangolo 2940×3000. Si devono tracciare due circonferenze tangenti esternamente, e ognuna delle due tangente a due lati consecutivi del rettangolo, in modo che tutti i lati siano toccati da una sola circonferenza. Determinare quanto vale, al massimo, la somma dei raggi. (Gara Naz. a Squadre pubblico 12/5/2007)



per discutere 5-6-7-8

- In $(x-a)(x-b)$ a e b sono numeri interi. Se $ab = 12$, quali valori può assumere $a + b$?
- In $(x-a)(x-b)$ a e b sono numeri interi. Se $a + b = 1$, quanti valori può assumere ab?
- Al variare di x e y nei reali, al punto $(x; y)$ del piano corrisponde il punto $\left(2x; \frac{y}{2}\right)$. La corrispondenza in questione che indicheremo φ è una funzione che prende il nome di trasformazione del piano in sé. In un piano cartesiano Oxy disegna il triangolo OAB e il suo trasformato $O'A'B'$ mediante φ, sapendo che $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.
- Quante sono le coppie di interi che soddisfano l'equazione $|x| + 2|y| = 4022$?

cidi Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

Si ringrazia . . . per la pazienza