Laboratorio CIDI

presso

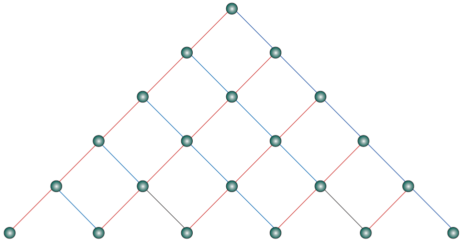
Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

12 marzo 2014

valerio.scorsipa@alice.it

un mondo di 1 e 0

Calcolo Combinatorio



Come il battito del cuore
è silenzio e suono
così in matematica
0 e 1 si avvicendano
felici e invisibili

UN PROBLEMA

Quattro spettatori si dispongono casualmente su due file da cinque posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti.

UN PROBLEMA
Quattro spettatori si dispongono casualmente su due file da cinque posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti.

fila 1	•	•	•	•	•
fila 2	•	•	•	•	•

al cinema

UN PROBLEMA
Quattro spettatori si dispongono casualmente su due file da cinque posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti.

fila 1	•	•	•	•	•
fila 2	•	•	•	•	•

Quali e quante sono le "sedute" favorevoli all'evento:

al cinema

UN PROBLEMA
Quattro spettatori si dispongono casualmente su due file da cinque posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti.

fila 1	●	●	●	●	●
fila 2	●	●	●	●	●

Quali e quante sono le “sedute” favorevoli all’evento:

- quattro spettatori in una fila:

fila 1	●	●	●	●	●
fila 2	●	●	●	●	●

al cinema

UN PROBLEMA
Quattro spettatori si dispongono casualmente su due file da cinque posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti.

fila 1	●	●	●	●	●
fila 2	●	●	●	●	●

Quali e quante sono le "sedute" favorevoli all'evento:

- tre spettatori in una fila:

fila 1	●	●	●	●	●
fila 2	●	●	●	●	●

al cinema

UN PROBLEMA
Quattro spettatori si dispongono casualmente su due file da cinque posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti.

fila 1	●	●	●	●	●
fila 2	●	●	●	●	●

Quali e quante sono le "sedute" favorevoli all'evento:

- due spettatori in ogni fila:

fila 1	●	●	●	●	●
fila 2	●	●	●	●	●

I casi favorevoli:

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)$\times$2	$? \times 2 = ?$
	(3 posti su 5) $\times$ (1 posto su 2) $\times$2	$? \times ? = ?$
	(2 posti su 5) $\times$ (2 posti su 3)	$? \times ? = ?$

occorre contare i casi relativi a:

I casi favorevoli:

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)$\times$2	$? \times 2 = ?$
	(3 posti su 5) $\times$ (1 posto su 2) $\times$2	$?\times? = ?$
	(2 posti su 5) $\times$ (2 posti su 3)	$?\times? = ?$

occorre contare i casi relativi a:

- (4 posti su 5)

I casi favorevoli:

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)$\times$2	$? \times 2 =?$
	(3 posti su 5) $\times$ (1 posto su 2) $\times$2	$?\times? =?$
	(2 posti su 5) $\times$ (2 posti su 3)	$?\times? =?$

occorre contare i casi relativi a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)

analisi iniziale

I casi favorevoli:

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)×2	$? \times 2 = ?$
	(3 posti su 5) × (1 posto su 2) ×2	$? \times ? = ?$
	(2 posti su 5) × (2 posti su 3)	$? \times ? = ?$

occorre contare i casi relativi a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)
- (2 posti su 5)

analisi iniziale

I casi favorevoli:

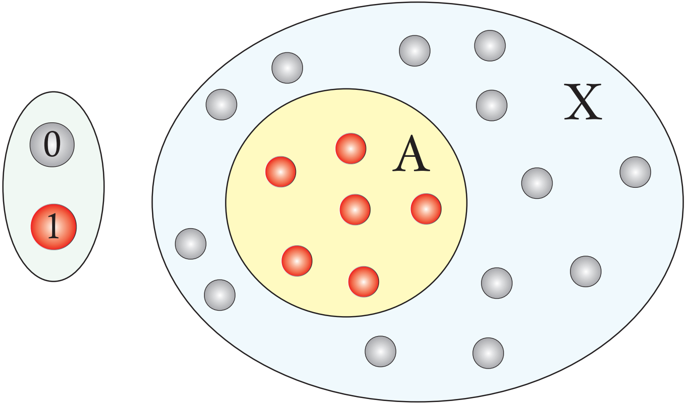
configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)×2	$? \times 2 = ?$
	(3 posti su 5) × (1 posto su 2) ×2	$?\times? = ?$
	(2 posti su 5) × (2 posti su 3)	$?\times? = ?$

occorre contare i casi relativi a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)
- (2 posti su 5)
- (2 posti su 3)

La funzione caratteristica di un sottoinsieme A di X

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$



da 3 a 4

da 3 a 4

con tre elementi

$$\Phi$$

$$\{a\} \qquad \{b\} \qquad \{c\}$$

$$\{a, b\} \qquad \{a, c\} \qquad \{b, c\}$$

$$\{a, b, c\}$$

da 3 a 4

con tre elementi			con uno in più		
	Φ			$\{d\}$	
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, d\}$	$\{b, d\}$	$\{c, d\}$
$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{b, c, d\}$
	$\{a, b, c\}$			$\{a, b, c, d\}$	

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

“radiografia” di un s.i.

“radiografia” di un s.i.

- Ogni sottoinsieme di un insieme di n elementi si può rappresentare con una n-pla ordinata di 1 e di 0: gli 1 per gli elementi del sottoinsieme e gli 0 per quelli del suo complementare.

- Rispetto all'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, la quintupla $(1, 0, 0, 1, 1) \in \mathbb{Z}_2^5$ rappresenta il sottoinsieme $\{a, d, e\}$.

Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

- Tutte le cinquine di 0 e di 1 rappresentano $\mathcal{P}(A)$

“radiografia” di un s.i.

- Il numero delle cinquine è il numero delle parti di un insieme di cardinalità 5.

“radiografia” di un s.i.

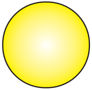
- Quante sono le cinquine?

stati di 1 lampadina

Stati di una lampadina:

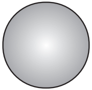
stati di 1 lampadina

Stati di una lampadina:

acceso 

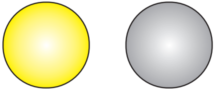
Stati di una lampadina:

Stati di una lampadina:

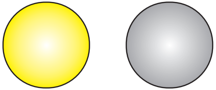
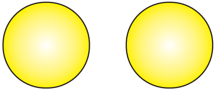
spento 

stati di 2 lampadine

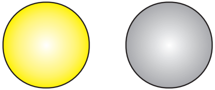
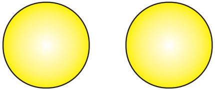
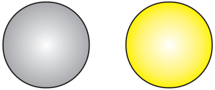
stati di 2 lampadine

on off	0 1	

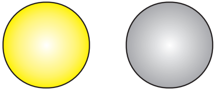
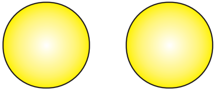
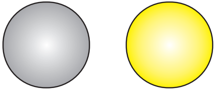
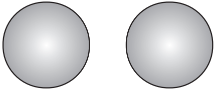
stati di 2 lampadine

on	off	0	1	
on	on	1	1	

stati di 2 lampadine

on	off	0	1	
on	on	1	1	
off	on	0	1	

stati di 2 lampadine

on off	0 1	
on on	1 1	
off on	0 1	
off off	0 0	

ASCII

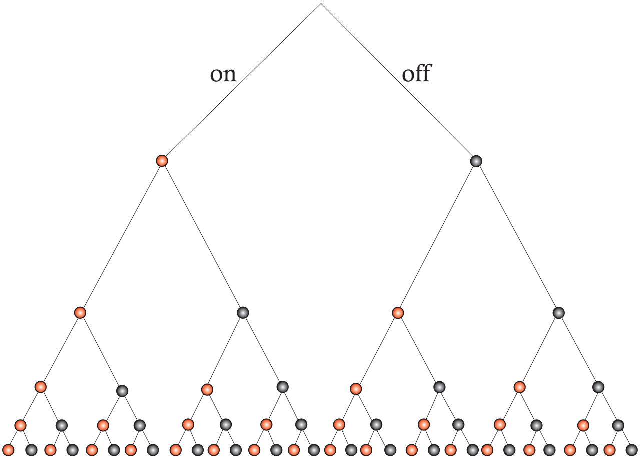
Codice ASCII							Carattere
1	0	0	0	0	1	1	C
1	0	0	1	0	0	1	I
1	0	0	0	1	0	0	D
1	0	0	1	0	0	1	I

l'albero

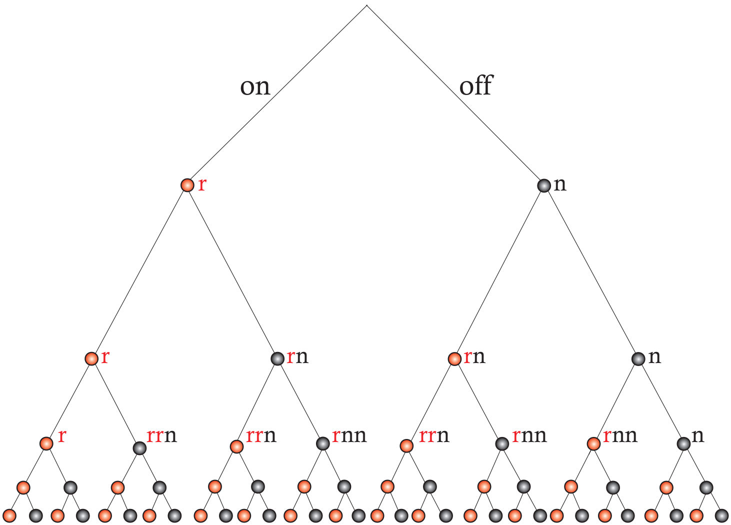
Gli stati di $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ lampadine crescono secondo 2^{n}, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

l'albero

Gli stati di $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ lampadine crescono secondo 2^{n}, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

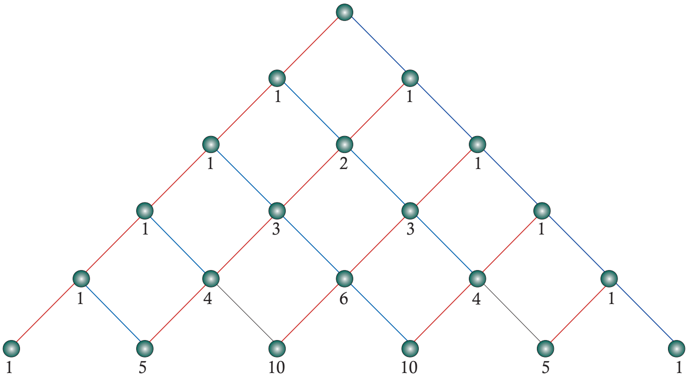


dall'albero al triangolo di Pascal



il triangolo di Pascal

Gli stati “acceso” e “spento” sono rappresentati con tratti diretti a sinistra e a destra e non più con nodi diversamente colorati.



combinazioni

Torniamo a:

Torniamo a:

- (4 posti su 5) •

Torniamo a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)

combinazioni

Torniamo a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)
- (2 posti su 5)

Torniamo a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)
- (2 posti su 5)
- (2 posti su 3)

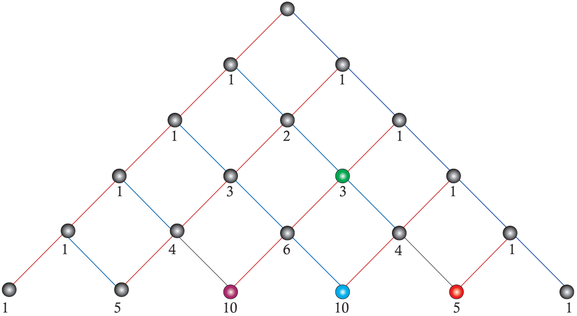
combinazioni

Torniamo a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)
- (2 posti su 5)
- (2 posti su 3)

Torniamo a:

- (4 posti su 5)
- (3 posti su 5)
- (2 posti su 5)
- (2 posti su 3)



Contiamo i casi favorevoli completando la tabella.

i casi favorevoli

Contiamo i casi favorevoli completando la tabella.

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)×2	$5 \times 2 = 10$

i casi favorevoli

Contiamo i casi favorevoli completando la tabella.

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)$\times$2	$5 \times 2 = 10$
	(3 posti su 5) $\times$ (1 posto su 2) $\times$2	$10 \times 4 = 40$

i casi favorevoli

Contiamo i casi favorevoli completando la tabella.

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)$\times$2	$5 \times 2 = 10$
	(3 posti su 5) $\times$ (1 posto su 2) $\times$2	$10 \times 4 = 40$
	(2 posti su 5) $\times$ (2 posti su 3)	$10 \times 3 = 30$

In totale 80.

i casi favorevoli

Contiamo i casi favorevoli completando la tabella.

configurazione	considerazioni	casi
	(4 posti su 5)$\times$2	$5 \times 2 = 10$
	(3 posti su 5) $\times$ (1 posto su 2) $\times$2	$10 \times 4 = 40$
	(2 posti su 5) $\times$ (2 posti su 3)	$10 \times 3 = 30$

In totale 80.

Ma ora bisogna contare i casi possibili.

I casi possibili

- Numerati da 1 a 10 i posti, dobbiamo calcolare il numero di tutte le 4-sedute rispetto ai 10 posti disponibili.

I casi possibili

- L'obiettivo sarà ottenuto mediante il triangolo di Pascal giungendo al quinto elemento della decima riga (210).

I casi possibili

- Occorre soffermarsi sulle proprietà del triangolo di Pascal e prima ancora sui sottoinsiemi distinti di un insieme finito aventi la stessa cardinalità.

I casi possibili

- In generale, dato un insieme di n elementi, indichiamo con $C_{n,k}$ il numero dei s.i. di cardinalità k contenuti nell'insieme dato. Ovviamente $k \leq n$.

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1
$C_{5,1}$	1	5

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1
$C_{5,1}$	1	5
$C_{5,2}$	2	10

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1
$C_{5,1}$	1	5
$C_{5,2}$	2	10
$C_{5,3}$	3	10

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1
$C_{5,1}$	1	5
$C_{5,2}$	2	10
$C_{5,3}$	3	10
$C_{5,4}$	4	5

il concetto di combinazione

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1
$C_{5,1}$	1	5
$C_{5,2}$	2	10
$C_{5,3}$	3	10
$C_{5,4}$	4	5
$C_{5,5}$	5	1
	totale	32

Per l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$

quanti sottoinsiemi		
simbolo	cardinalità	num. s.i.
$C_{5,0}$	0	1
$C_{5,1}$	1	5
$C_{5,2}$	2	10
$C_{5,3}$	3	10
$C_{5,4}$	4	5
$C_{5,5}$	5	1
	totale	32

Le prime due righe e le ultime due della tabella sono facilmente spiegabili.
Per la $3^{\underline{a}}$ e la $4^{\underline{a}}$ ragioniamo come segue.
Ad ognuno dei 5 s.i. di un solo elemento aggiungiamo un secondo elemento scelto tra i 4 restanti così da formare le $4 \times 5 = 20$ coppie.
$\{x, y\}$ e $\{y, x\}$ sono lo stesso s.i. perciò bisogna dividere 20 per 2.

Ad ogni coppia corrisponde biunivocamente una terna.

definizione ricorsiva

Dato un insieme di n elementi

$C_{\mathrm{n},0} = 1$	

Dato un insieme di n elementi

$C_{\mathrm{n},0} = 1$	
$C_{\mathrm{n},1} = n$	

definizione ricorsiva

Dato un insieme di n elementi

$C_{\mathrm{n},0} = 1$	
$C_{\mathrm{n},1} = n$	
$C_{\mathrm{n},2} = C_{\mathrm{n},1} \cdot \frac{n-1}{2}$	ogni coppia si ottiene da due elementi

cidi Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

definizione ricorsiva

Dato un insieme di n elementi

$C_{\mathrm{n},0} = 1$	
$C_{\mathrm{n},1} = n$	
$C_{\mathrm{n},2} = C_{\mathrm{n},1} \cdot \frac{n-1}{2}$	ogni coppia si ottiene da due elementi
$C_{\mathrm{n},3} = C_{\mathrm{n},2} \cdot \frac{n-2}{3}$	ogni terna si ottiene da tre coppie

definizione ricorsiva

Dato un insieme di n elementi

$C_{\mathrm{n},0} = 1$	
$C_{\mathrm{n},1} = n$	
$C_{\mathrm{n},2} = C_{\mathrm{n},1} \cdot \frac{n-1}{2}$	ogni coppia si ottiene da due elementi
$C_{\mathrm{n},3} = C_{\mathrm{n},2} \cdot \frac{n-2}{3}$	ogni terna si ottiene da tre coppie
$\dots$	$\dots$

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

definizione ricorsiva

Dato un insieme di n elementi

$C_{\mathrm{n},0} = 1$	
$C_{\mathrm{n},1} = n$	
$C_{\mathrm{n},2} = C_{\mathrm{n},1} \cdot \frac{n-1}{2}$	ogni coppia si ottiene da due elementi
$C_{\mathrm{n},3} = C_{\mathrm{n},2} \cdot \frac{n-2}{3}$	ogni terna si ottiene da tre coppie
...	...
$C_{\mathrm{n,k}} = C_{\mathrm{n,k\text{-}1}} \cdot \frac{n-k+1}{k}$	ogni k-pla si ottiene da k (k-1)-ple
...	...

Dato un insieme di n elementi

$C_{\text{n},0} = 1$	
$C_{\text{n},1} = n$	
$C_{\text{n},2} = C_{\text{n},1} \cdot \frac{n-1}{2}$	ogni coppia si ottiene da due elementi
$C_{\text{n},3} = C_{\text{n},2} \cdot \frac{n-2}{3}$	ogni terna si ottiene da tre coppie
...	...
$C_{\text{n,k}} = C_{\text{n,k-1}} \cdot \frac{n-k+1}{k}$	ogni k-pla si ottiene da k (k-1)-ple
...	...
$C_{\text{n,n}} = C_{\text{n,n-1}} \cdot \frac{1}{n}$	

In sintesi:

$$C_{\text{n},0} = 1$$

$$C_{\text{n,k}} = C_{\text{n,k-1}} \cdot \frac{n-(k-1)}{k},\ 0 < k \leq n$$

definizione ricorsiva

Facendo i conti a ritroso:

$$C_{\text{n,k}} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)]}^{k\ fattori}}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1},\ 0 < k \leq n$$

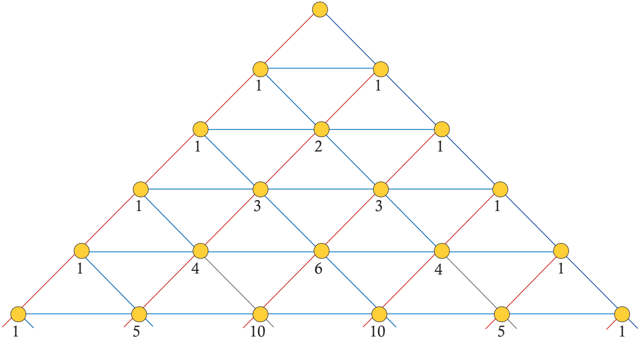
I casi favorevoli sono

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

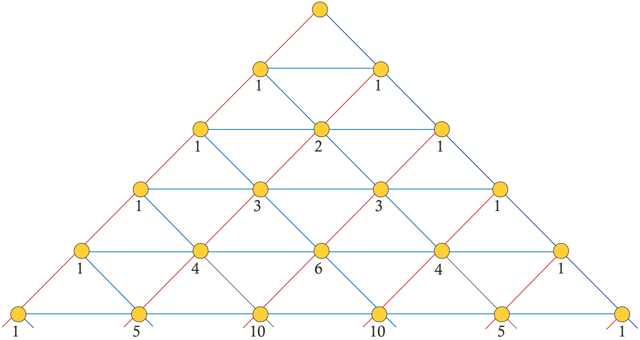
e la probabilità è

$$\boxed{\frac{80}{210} = \frac{8}{21}}$$

una specie di riferimento $\binom{n}{k}$



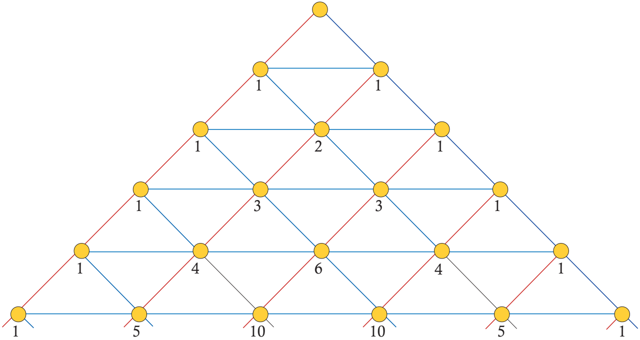
una specie di riferimento $\binom{n}{k}$



Nel triangolo di Pascal:

- “ascisse” sono le righe numerate $0, 1, 2, \ldots$ dal vertice in alto,

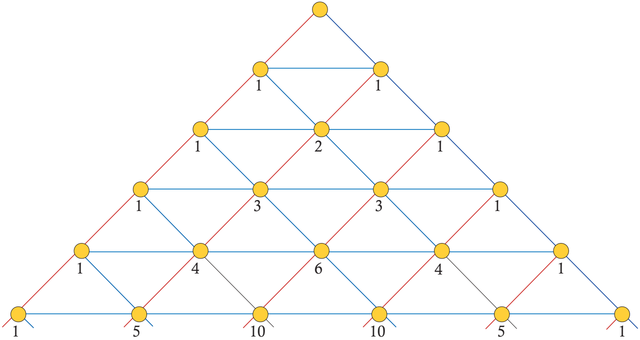
una specie di riferimento $\binom{n}{k}$



Nel triangolo di Pascal:

- "ascisse" sono le righe numerate $0, 1, 2, \ldots$ dal vertice in alto,
- "ordinate" le linee parallele al lato obliquo di sinistra numerate $0, 1, 2, \ldots$

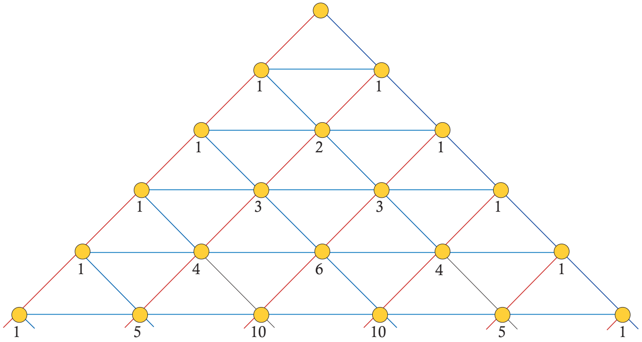
una specie di riferimento $\binom{n}{k}$



Nel triangolo di Pascal:

- “ascisse” sono le righe numerate $0, 1, 2, \ldots$ dal vertice in alto,
- “ordinate” le linee parallele al lato obliquo di sinistra numerate $0, 1, 2, \ldots$
- per esempio, i numeri 4 e 2 sono le “coordinate” del numero 6

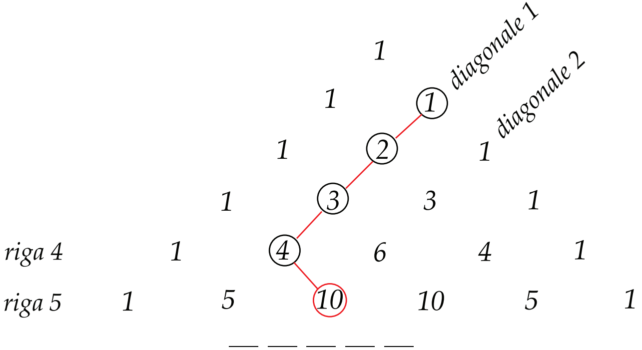
una specie di riferimento $\binom{n}{k}$



Nel triangolo di Pascal:

- "ascisse" sono le righe numerate $0, 1, 2, \ldots$ dal vertice in alto,
- "ordinate" le linee parallele al lato obliquo di sinistra numerate $0, 1, 2, \ldots$
- per esempio, i numeri 4 e 2 sono le "coordinate" del numero 6
- la coppia ordinata $(n; k)$ con $0 \leq k \leq n$ si indica con $\binom{n}{k}$

somma dei primi n-1 naturali



diagonale 1

diagonale 2

1

1 *1*

1 *2* *1*

1 *3* *3* *1*

riga 4 *1* *4* *6* *4* *1*

riga 5 *1* *5* *10* *10* *5* *1*

— — — — —

$$1 + 2 + 3 + 4 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

somma dei primi n-1 naturali

diagonale 1

diagonale 2

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\textit{riga 4} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\textit{riga 5} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

— — — — —

$$1 + 2 + 3 + 4 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

e in generale

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

somma elementi di una diagonale

diagonale 2

diagonale 3

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
riga 5		1		5		10		10		5		1		
riga 6	1		6		15		20		15		6		1	

___ ___ ___ ___ ___

somma elementi di una diagonale

diagonale 2

diagonale 3

1

1 *1*

1 *2* *1*

1 *3* *3* *1*

1 *4* *6* *4* *1*

riga 5 *1* *5* *10* *10* *5* *1*

riga 6 *1* *6* *15* *20* *15* *6* *1*

__ __ __ __ __

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$$

somma elementi di una diagonale

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

riga 5 1 5 10 10 5 1

riga 6 1 6 15 20 15 6 1

diagonale 2

diagonale 3

— — — — —

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$$

e in generale

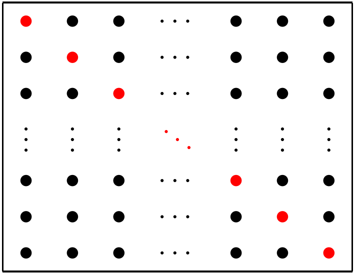
$$\sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \binom{n}{k}$$

i numeri triangolari

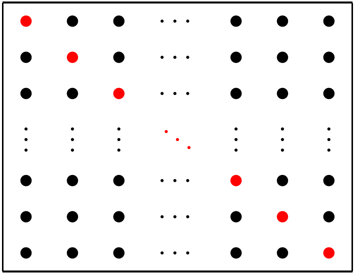
$$\frac{\text{(quadrato - diagonale)}}{\text{due}}$$

i numeri triangolari

$$\frac{\text{(quadrato - diagonale)}}{\text{due}}$$

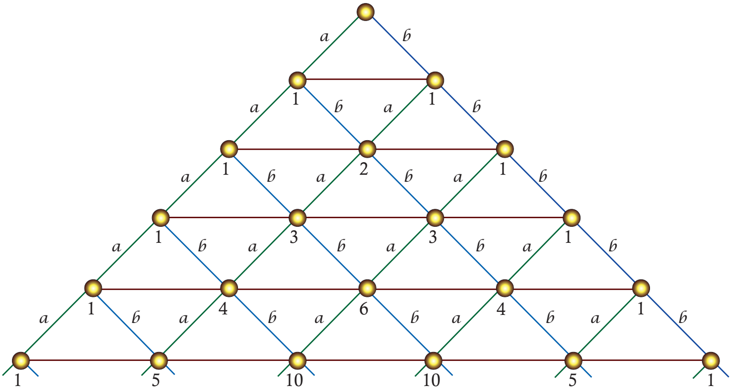


$$\frac{\text{(quadrato - diagonale)}}{\text{due}}$$

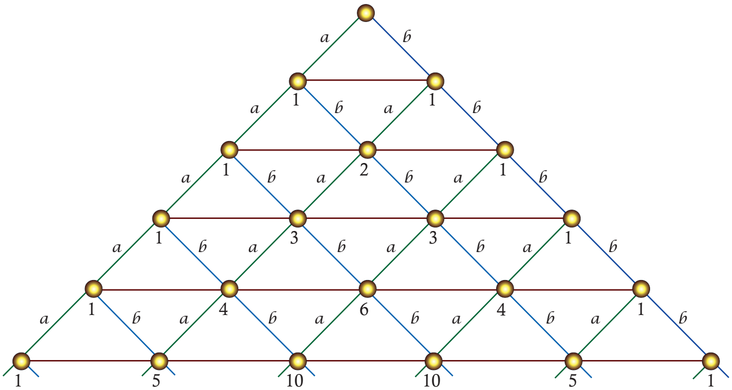


$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

potenza del binomio



potenza del binomio



$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$a+b$	a+b
$(a+b)^2$	$(a+b)(a+b)$	$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3$	$(a+b)(a^2+2ab+b^2)$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4$	$(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
...	...	...

coefficienti binomiali

I coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima del binomio sono le combinazioni semplici $C_{\mathrm{n,k}}$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1, n$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

e se $a = b = 1$ ...

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

verso il numero e

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

verso il numero e

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k=0}}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1+1+\binom{n}{2}\tfrac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\tfrac{1}{n^n}\end{aligned}$$

verso il numero e

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \binom{n}{2} \tfrac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n} \tfrac{1}{n^n} \\ &= 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

cidi Perugia
centroiniziativademocraticainsegnanti

verso il numero e

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$
\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\binom{n}{2}\tfrac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\tfrac{1}{n^n} \\
&= 2+\tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)+\ldots+\tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\ldots+\tfrac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\binom{n}{2}\tfrac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\tfrac{1}{n^n} \\
&= 2+\tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)+\ldots+\tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\ldots+\tfrac{1}{n!} \leq 2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\ldots+\tfrac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k=0}}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \binom{n}{2} \tfrac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n} \tfrac{1}{n^n} \\
&= 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} \leq 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^n} \\
&= 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

verso il numero e

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$
\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \binom{n}{2} \tfrac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n} \tfrac{1}{n^n} \\
&= 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{n!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \tfrac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} \leq 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^n} \\
&= 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

verso il numero e

Un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton

$$
\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \binom{n}{2} \tfrac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n} \tfrac{1}{n^n} \\
&= 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{n!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \tfrac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} \leq 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^n} \\
&= 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

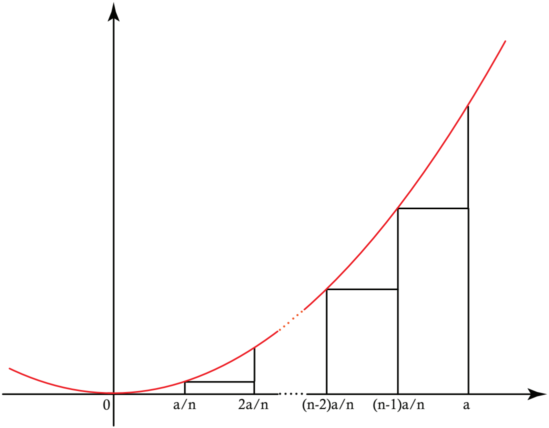
$$\boxed{2 \leq \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

foriero di molti sviluppi!

cidi Perugia centroiniziativademocraticainsegnanti

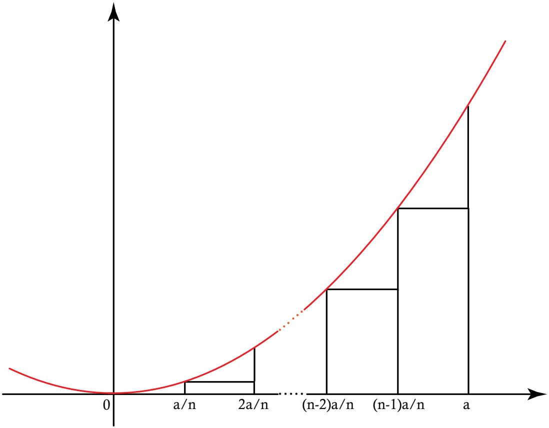
quadratura della parabola

Calcolare l'area fra la parabola $y = x^2$ e l'intervallo $[0, a]$ dell'asse x.



quadratura della parabola

Calcolare l'area fra la parabola $y = x^2$ e l'intervallo $[0, a]$ dell'asse x.



Area k-esimo rettangolo $(0 \leq k \leq n-1)$: $R_{\mathrm{k}} = \frac{a^3}{n^3} k^2$

Area plurirettangolo inscritto: $\frac{a^3}{n^3}\left[1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right]$

$1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2$

- $$\begin{aligned} k^2 &= (\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{\text{k volte}})^2 \\ &= \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{\text{k volte}} + 2\Big[(k-1) + (k-2) + \cdots + 1\Big] \\ &= k + 2\Big[(k-1) + (k-2) + \cdots + 1\Big] = k + 2\binom{k}{2}. \end{aligned}$$

$1+2^2+\cdots+(n-1)^2$

- $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[k+2\binom{k}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} k + 2\sum_{k=2}^{n-1}\binom{k}{2} \\ &= \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.\end{aligned}$$

Il plurirettangolo "esaurisce" la regione di piano che ci interessa

esaustione: $n \to +\infty$

Il plurirettangolo “esaurisce” la regione di piano che ci interessa

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1} R_{\mathrm{k}} = a^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

esaustione: $n \to +\infty$

Il plurirettangolo "esaurisce" la regione di piano che ci interessa

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1} R_{\mathrm{k}} = a^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

esaustione: $n \to +\infty$

Il plurirettangolo "esaurisce" la regione di piano che ci interessa

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1} R_{\mathrm{k}} = a^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$

esaustione: $n \to +\infty$

Il plurirettangolo "esaurisce" la regione di piano che ci interessa

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1} R_{\mathrm{k}} = a^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$

$$= \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

esaustione: $n \to +\infty$

Il plurirettangolo “esaurisce” la regione di piano che ci interessa

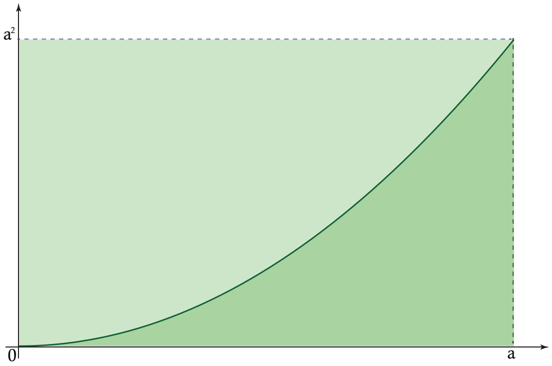
$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1} R_{\mathrm{k}} = a^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

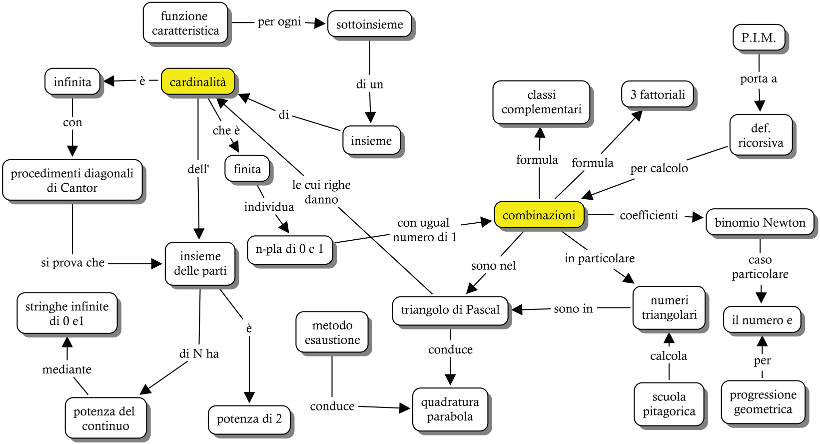
$$= \frac{a^3}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$

$$= \frac{a^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbf{\frac{a^3}{3}}$$

Area segmento parabolico



una mappa...


funzione caratteristica
per ogni
sottoinsieme
di un
insieme
di
cardinalità
è
infinita
con
procedimenti diagonali di Cantor
si prova che
insieme delle parti
dell'
che è
finita
individua
n-pla di 0 e 1
le cui righe danno
con ugual numero di 1
combinazioni
formula
classi complementari
formula
3 fattoriali
per calcolo
def. ricorsiva
porta a
P.I.M.
coefficienti
binomio Newton
caso particolare
il numero e
per
progressione geometrica
in particolare
numeri triangolari
sono in
triangolo di Pascal
sono nel
calcola
scuola pitagorica
conduce
quadratura parabola
conduce
metodo esaustione
stringhe infinite di 0 e1
mediante
potenza del continuo
di N ha
è
potenza di 2

grazie
per l'attenzione