

Per una Matematica di Qualità

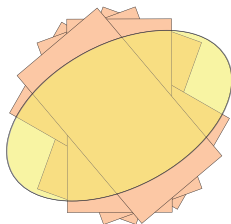


Laboratorio CIDI presso Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

17 febbraio 2014

valerio.scorsipa@alice.it

Imparare a contare



premesse

- Nella pratica didattica è bene non pensare che una questione sia del tutto terminata. Ci sono sempre, a ben guardare, aspetti non ancora indagati o risolti e che quindi sono uno stimolo a proseguire.

premesse

- Il rischio potrebbe essere d'impoverire la portata e l'idea stessa di ricerca e di offrire al giovane il convincimento che tutto s'accomodi, mentre ciò non è quasi mai vero, proprio come nella vita.

che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

Nel caso che descriveremo servono:

che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

Nel caso che descriveremo servono:



che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

Nel caso che descriveremo servono:

- **un paio di forbici,**



che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

Nel caso che descriveremo servono:

- un paio di forbici,
- **un cartoncino,**



che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

Nel caso che descriveremo servono:

- un paio di forbici,
- un cartoncino,
- **fogli quadrettati**,



che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

Nel caso che descriveremo servono:

- un paio di forbici,
- un cartoncino,
- fogli quadrettati,
- **riga, squadra e matite**

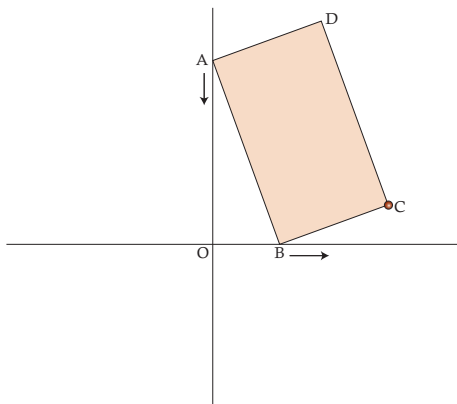


domanda chiave

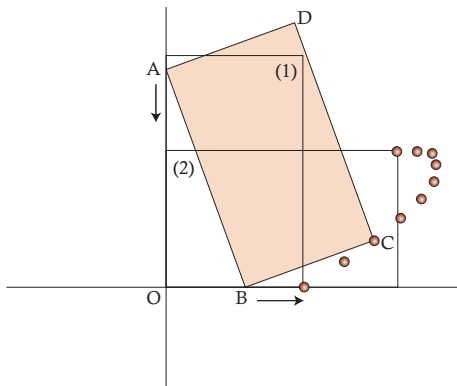
Che cosa disegna una punta scrivente posta nel vertice di un rettangolo, se altri due vertici consecutivi scorrono l'uno su una retta e l'altro su un'altra fra loro perpendicolari?

domanda chiave

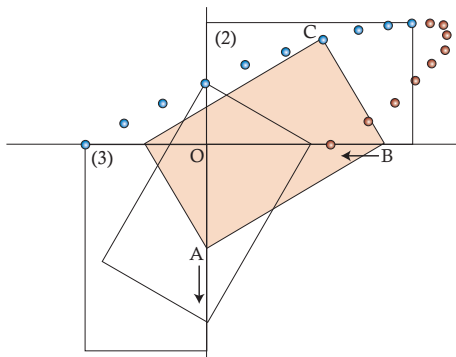
Che cosa disegna una punta scrivente posta nel vertice di un rettangolo, se altri due vertici consecutivi scorrono l'uno su una retta e l'altro su un'altra fra loro perpendicolari?



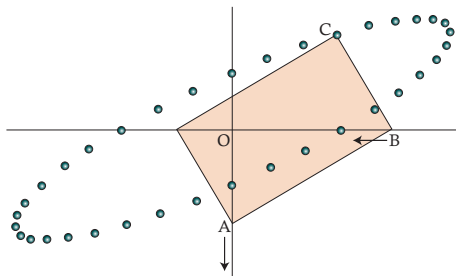
un primo stadio



ruotando ancora

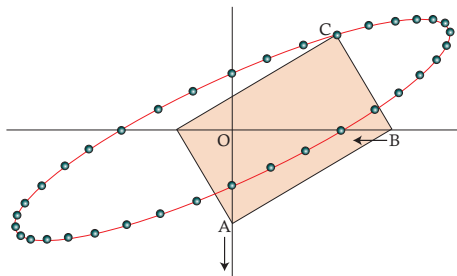


e alla fine

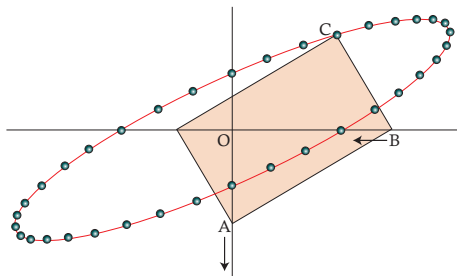


I punti ottenuti mostrano le posizioni assunte da C in un andirivieni di A .

e alla fine

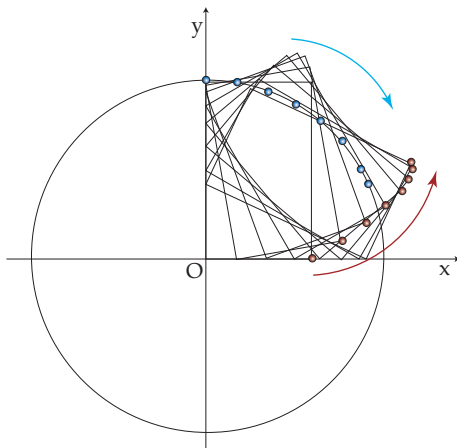


e alla fine



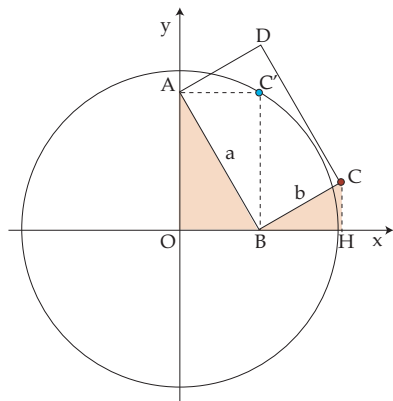
L'ellisse, luogo delle posizioni assunte da C.

versi contrari

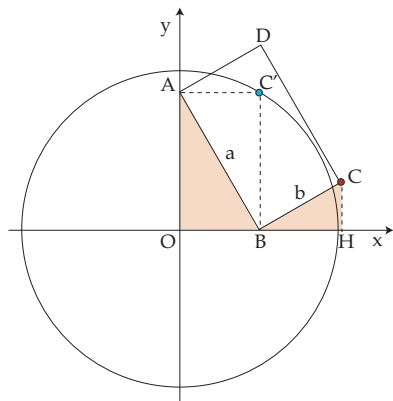


entra in scena Oxy

entra in scena Oxy



entra in scena Oxy



- La posizione del rettangolo e quindi di C dipende da C' punto del piano avente B e A come proiezioni sugli assi x e y .

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$

le formule inverse che danno C' in funzione di C :

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$

le formule inverse che danno C' in funzione di C :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}y \\ y' &= \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{aligned}$$

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$

le formule inverse che danno C' in funzione di C :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}y' \\ y' &= \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{aligned}$$

sostituite in $x'^2 + y'^2 = a^2$

fanno ottenere l'equazione del luogo che C descrive al variare di C' sulla circonferenza:

1 punto unito

Se (x, y) è un punto unito allora deve essere

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a}y = x \\ \frac{b}{a}x = y \end{cases}$$

e unica soluzione è $(0, 0)$.

1 punto unito

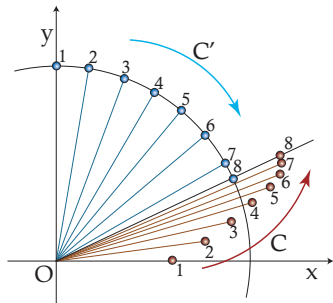
Se (x, y) è un punto unito allora deve essere

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a}y = x \\ \frac{b}{a}x = y \end{cases}$$

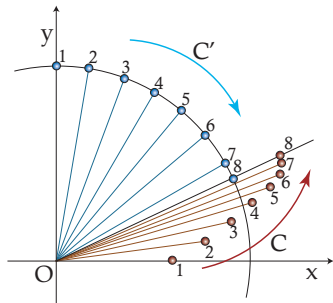
e unica soluzione è $(0, 0)$.

Essendo O l'unico punto unito nella φ , possono esserci rette unite soltanto nel fascio $y = mx$.

2 perpendicolari unite



2 perpendicolari unite

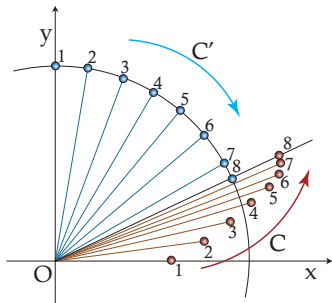


Mediante

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b}y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

2 perpendicolari unite



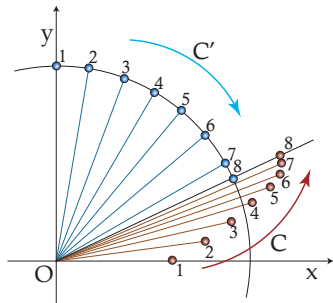
Mediante

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b}y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) = m\frac{a}{b}y \implies y = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}x$$

2 perpendicolari unite



Mediante

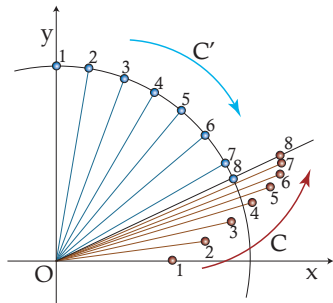
$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b}y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) = m\frac{a}{b}y \implies y = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}x$$

Affinché r sia unita dev'essere $m = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}$ e quindi

2 perpendicolari unite



Mediante

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b}y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) = m\frac{a}{b}y \implies y = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}x$$

Affinché r sia unita dev'essere $m = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}$ e quindi

$$bm^2 + am - b = 0$$

un esempio

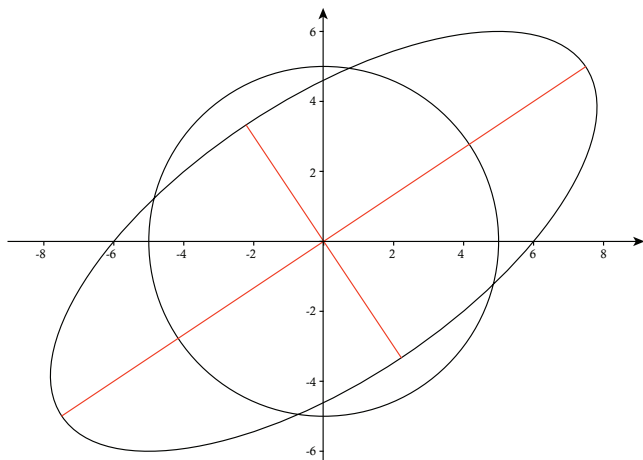
con $a = 5$ e $b = 6$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ corrisponde l'ellisse

$$\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + y^2 = 36$$

un esempio

con $a = 5$ e $b = 6$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ corrisponde l'ellisse

$$\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + y^2 = 36$$



domande e nuovi problemi

- ① Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

domande e nuovi problemi

- ① Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
- ② Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?

domande e nuovi problemi

- ① Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
- ② Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?
- ③ **Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?**

domande e nuovi problemi

- ① Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
- ② Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?
- ③ Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?
- ④ Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?

domande e nuovi problemi

- ① Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
- ② Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?
- ③ Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?
- ④ Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?
- ⑤ **Se le punte scriventi sono sia in C sia in D , quale relazione intercorre fra le ellissi che sono disegnate?**

domande e nuovi problemi

- ① Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
- ② Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?
- ③ Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?
- ④ Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?
- ⑤ Se le punte scriventi sono sia in C sia in D , quale relazione intercorre fra le ellissi che sono disegnate?
- ⑥ **etc.**

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse
- Altre domande

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse
- Altre domande
 - è possibile una qualche relazione sul moto reciproco di A e di B ?

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

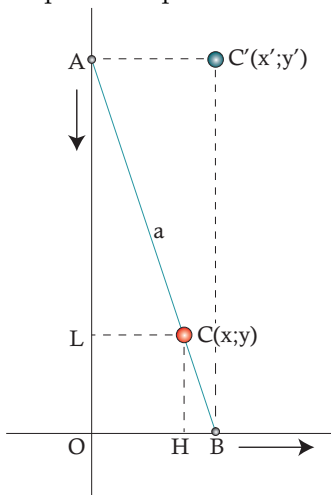
- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse
- Altre domande
 - è possibile una qualche relazione sul moto reciproco di A e di B ?
 - c'è di mezzo il moto armonico?

sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?

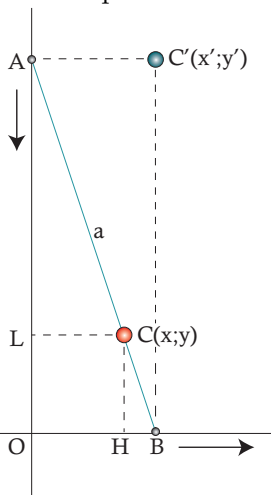
sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?



sulla seconda domanda

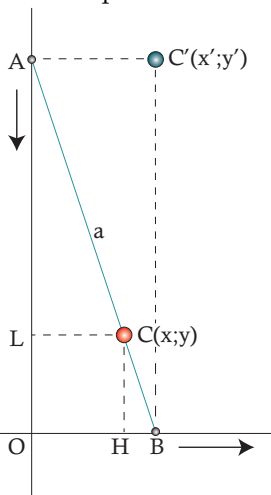
Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?



Per identificare la posizione di C basta porre $k = AB/CB$. Di riflesso per il teor. di Talete:

sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?



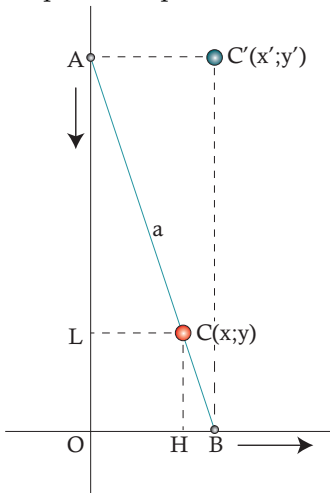
Per identificare la posizione di C basta porre $k = AB/CB$. Di riflesso per il teor. di Talete:

$$\frac{x'}{x' - x} = k \implies x' = \frac{kx}{k - 1}$$

$$\frac{y'}{y} = k \implies y' = ky$$

sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB ?



Per identificare la posizione di C basta porre $k = AB/CB$. Di riflesso per il teor. di Talete:

$$\frac{x'}{x' - x} = k \implies x' = \frac{kx}{k - 1}$$

$$\frac{y'}{y} = k \implies y' = ky$$

e mediante quelle formule dalla circonferenza

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

si passa all'ellisse

$$\frac{k^2}{(k - 1)^2} x^2 + k^2 y^2 = a^2.$$

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- **L'affinità si riduce alla semplice omotetia:**

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- L'affinità si riduce alla semplice omotetia:

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

- e C descrive la circonferenza di centro O con raggio $\frac{a}{2}$.

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- L'affinità si riduce alla semplice omotetia:

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

- e C descrive la circonferenza di centro O con raggio $\frac{a}{2}$.

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.

In tal caso

$$\frac{x'}{x' - x} = k$$

$$\frac{y'}{y} = k$$

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB ?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.

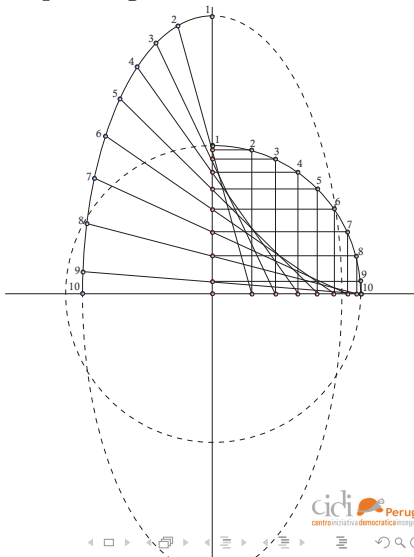
In tal caso

$$\frac{x'}{x' - x} = k$$

$$\frac{y'}{y} = k$$

e la circonferenza $x'^2 + y'^2 = a^2$ si trasforma ancora nell'ellisse:

$$\frac{k^2}{(k-1)^2} x^2 + k^2 y^2 = a^2.$$



quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- sistemi lineari, metodo di Cramer $\begin{cases} ax + by = x' \\ cy + dy = y' \end{cases}$

quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- affinità con $O(0; 0)$ punto unito $\begin{cases} x \mapsto ax + by \\ y \mapsto cy + dy \end{cases}, ad - bc \neq 0$

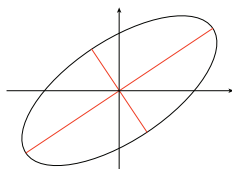
quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- matrici e determinanti 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:



- ellisse non canonica, autovettori ...

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica
- **imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze**

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica
- imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze
- **apprezzare e far apprezzare una matematica allo “statu nascendi”**

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica
- imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze
- apprezzare e far apprezzare una matematica allo “statu nascendi”
- **far capire che una ricerca non ha termine perché in quanto tale conduce ad altra ricerca.**

