Per una Matematica di Qualità

Laboratorio CIDI

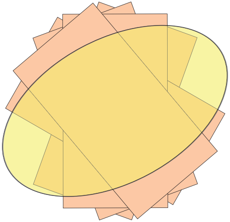
presso

Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

17 febbraio 2014

valerio.scorsipa@alice.it

Dal rettangolo l'ellisse



premessa

- Nella pratica didattica è bene non pensare che una questione sia del tutto terminata. Ci sono sempre, a ben guardare, aspetti non ancora indagati o risolti e che quindi sono uno stimolo a proseguire.

premessa

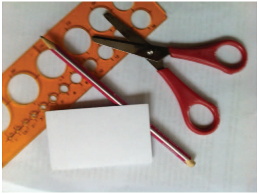
- Il rischio potrebbe essere d'impoverire la portata e l'idea stessa di ricerca e di offrire al giovane il convincimento che tutto s'accomodi, mentre ciò non è quasi mai vero, proprio come nella vita.

che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.
Nel caso che descriveremo servono:

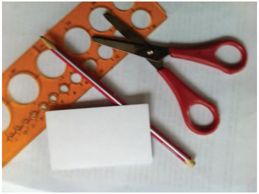
che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.
Nel caso che descriveremo servono:



che cosa serve

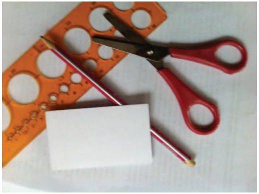
È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.
Nel caso che descriveremo servono:



- **un paio di forbici,**

che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.

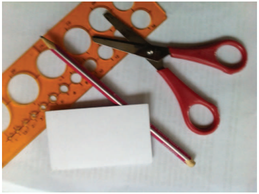


Nel caso che descriveremo servono:

- un paio di forbici,
- **un cartoncino,**

che cosa serve

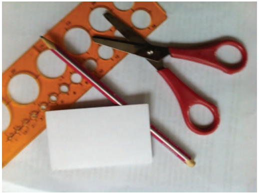
È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.
Nel caso che descriveremo servono:



- un paio di forbici,
- un cartoncino,
- **fogli quadrettati,**

che cosa serve

È possibile un'**attività di scoperta** con un'attrezzatura e un materiale molto semplici per coinvolgere la manualità e l'inventiva degli allievi.
Nel caso che descriveremo servono:



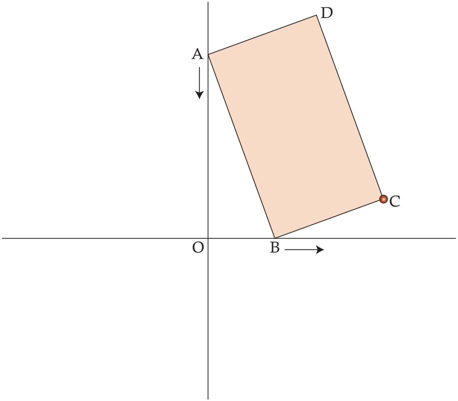
- un paio di forbici,
- un cartoncino,
- fogli quadrettati,
- **riga, squadra e matite**

domanda chiave

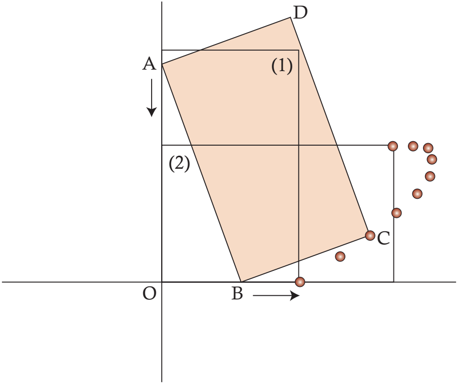
Che cosa disegna una punta scrivente posta nel vertice di un rettangolo, se altri due vertici consecutivi scorrono l'uno su una retta e l'altro su un'altra fra loro perpendicolari?

domanda chiave

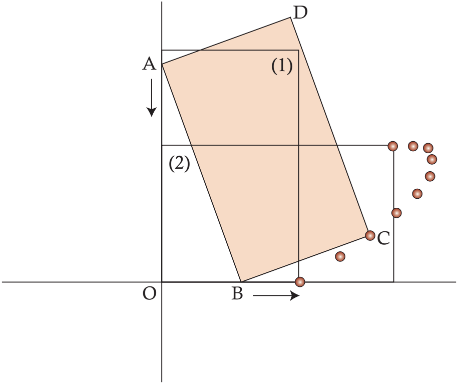
Che cosa disegna una punta scrivente posta nel vertice di un rettangolo, se altri due vertici consecutivi scorrono l'uno su una retta e l'altro su un'altra fra loro perpendicolari?



un primo stadio

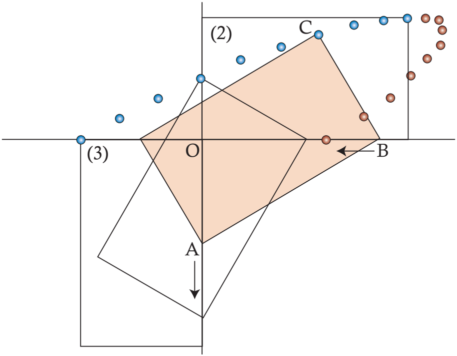


un primo stadio

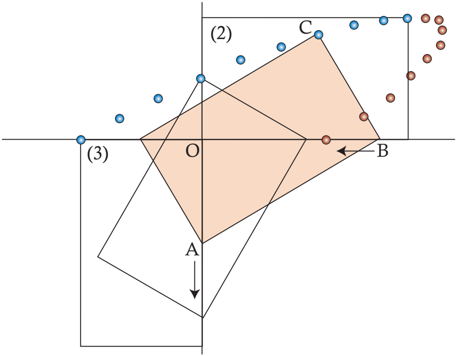


I punti sono la traccia del vertice mentre il rettangolo gira di 10° in 10° in senso antiorario passando dalla posizione (1) alla (2).

ruotando ancora

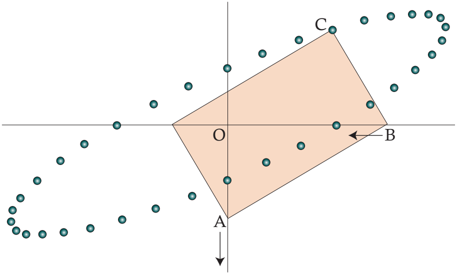


ruotando ancora



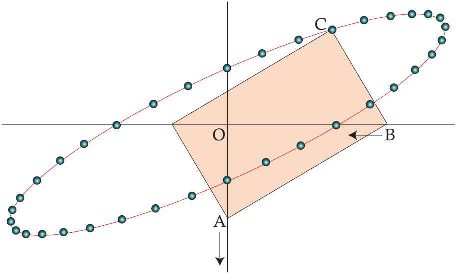
I punti azzurri sono la traccia del vertice mentre il rettangolo gira ancora di 10° in 10° in senso antiorario passando dalla posizione (2) alla (3).

e alla fine

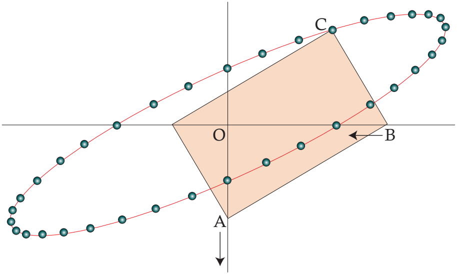


I punti ottenuti mostrano le posizioni assunte da C in un andirivieni di A.

e alla fine

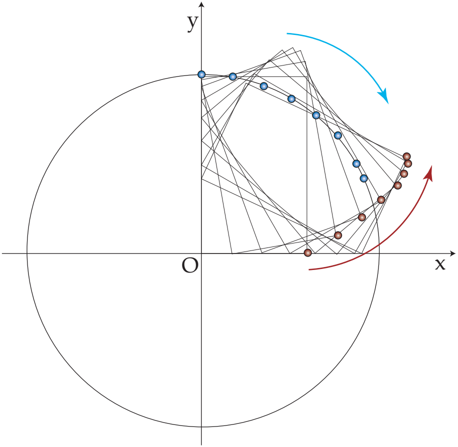


e alla fine

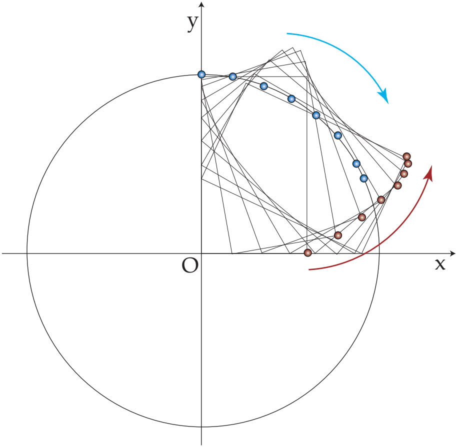


L'ellisse, luogo delle posizioni assunte da C.

versi contrari



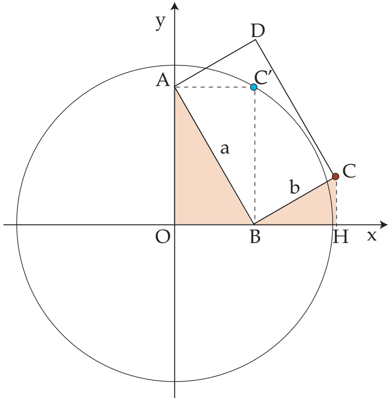
versi contrari



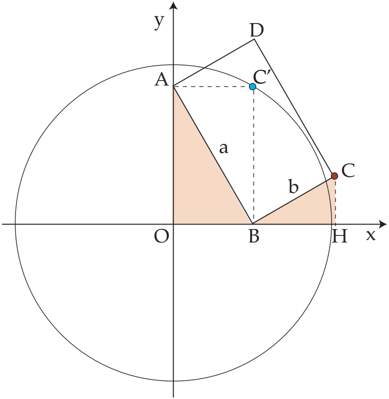
le curve sono percorse in senso contrario

entra in scena Oxy

entra in scena Oxy

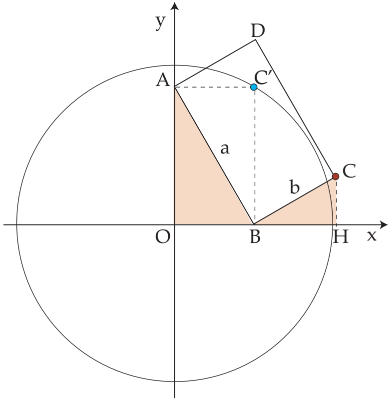


entra in scena Oxy



- La posizione del rettangolo e quindi di C dipende da C' punto del piano avente B e A come proiezioni sugli assi x e y.

entra in scena Oxy

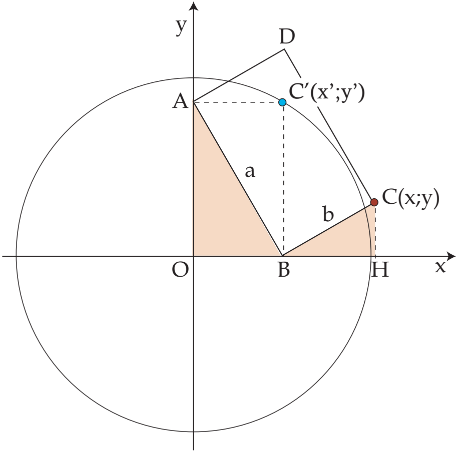


- In altri termini esiste una

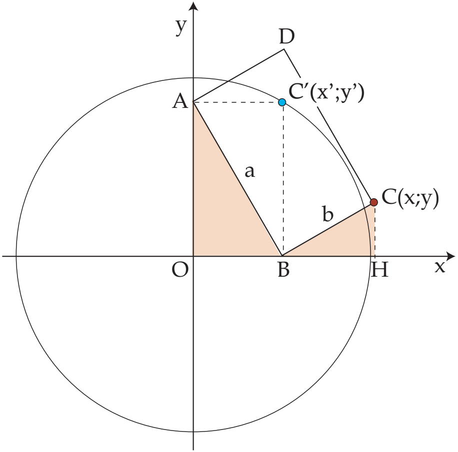
  $\boxed{\text{biiezione}}$

  fra i punti della circonferenza di centro O e di raggio a e quelli dell'ellisse.

l'affinità

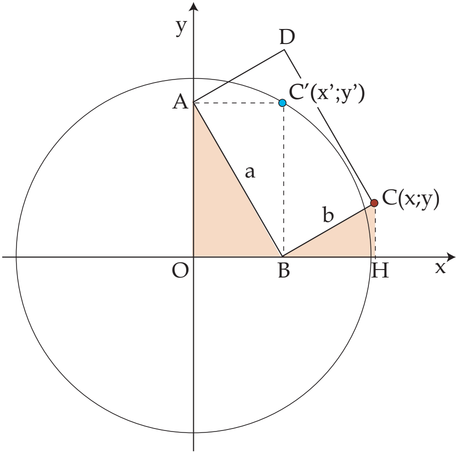


l'affinità



Poniamo $C'(x', y')$ e $C(x, y)$ e dunque $A(0, y')$ e $B(x', 0)$.
Per il teor. di Pitagora e la similitudine dei triangoli AOB e BHC valgono le relazioni:

l'affinità



Poniamo $C'(x', y')$ e $C(x, y)$ e dunque $A(0, y')$ e $B(x', 0)$.
Per il teor. di Pitagora e la similitudine dei triangoli AOB e BHC valgono le relazioni:

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

$$x = x' + \frac{b}{a}y'$$

$$y = \frac{b}{a}x'$$

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$
le formule inverse che danno C' in funzione di C:

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$
le formule inverse che danno C' in funzione di C:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}y \\ y' &= \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{aligned}}$$

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$
le formule inverse che danno C' in funzione di C:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}y \\ y' &= \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{aligned}}$$

sostituite in $x'^2 + y'^2 = a^2$
fanno ottenere l'equazione del luogo che C descrive al variare di C' sulla circonferenza:

l'ellisse

Da $x = x' + \frac{b}{a}y'$ e $y = \frac{b}{a}x'$
le formule inverse che danno C' in funzione di C:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}y \\ y' &= \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{aligned}}$$

sostituite in $x'^2 + y'^2 = a^2$
fanno ottenere l'equazione del luogo che C descrive al variare di C' sulla circonferenza:

$$\boxed{\left(x - \frac{a}{b}y\right)^2 + y^2 - b^2 = 0.}$$

cidi Perugia centroiniziativademocraticainsegnanti

1 punto unito

Se (x, y) è un punto unito allora deve essere

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a} y = x \\ \frac{b}{a} x = y \end{cases}$$

e unica soluzione è $(0, 0)$.

1 punto unito

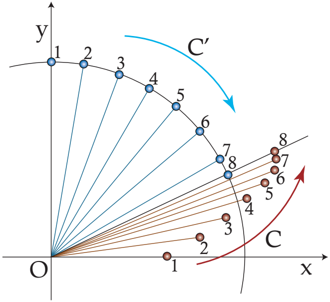
Se (x, y) è un punto unito allora deve essere

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a} y = x \\ \frac{b}{a} x = y \end{cases}$$

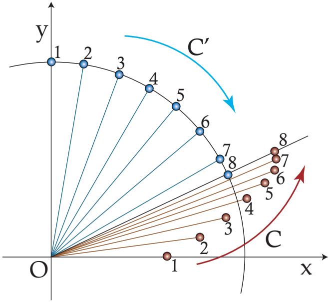
e unica soluzione è $(0, 0)$.
Essendo O l'unico punto unito nella φ, possono esserci rette unite soltanto nel fascio $y = mx$.

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

2 perpendicolari unite



2 perpendicolari unite

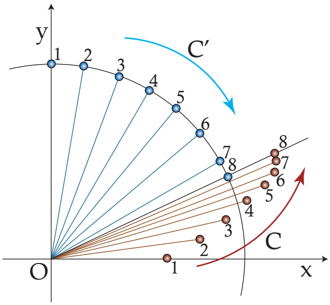


Mediante

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b}y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

2 perpendicolari unite



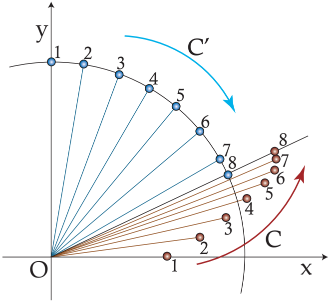
Mediante

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b} y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b} y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b} y\right) = m \frac{a}{b} y \implies y = \frac{1}{m + \frac{a}{b}} x$$

2 perpendicolari unite



Mediante

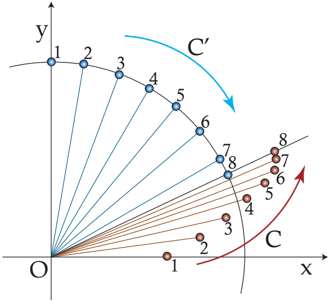
$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b}y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}y\right) = m\frac{a}{b}y \implies y = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}x$$

Affinché r sia unita dev'essere $m = \frac{1}{m+\frac{a}{b}}$ e quindi

2 perpendicolari unite



Mediante

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} x & \mapsto \frac{a}{b} y \\ y & \mapsto \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b} y\right) \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di r' trasformata di r

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b} y\right) = m \frac{a}{b} y \implies y = \frac{1}{m + \frac{a}{b}} x$$

Affinché r sia unita dev'essere $m = \frac{1}{m + \frac{a}{b}}$ e quindi

$$\boxed{bm^2 + am - b = 0}$$

un esempio

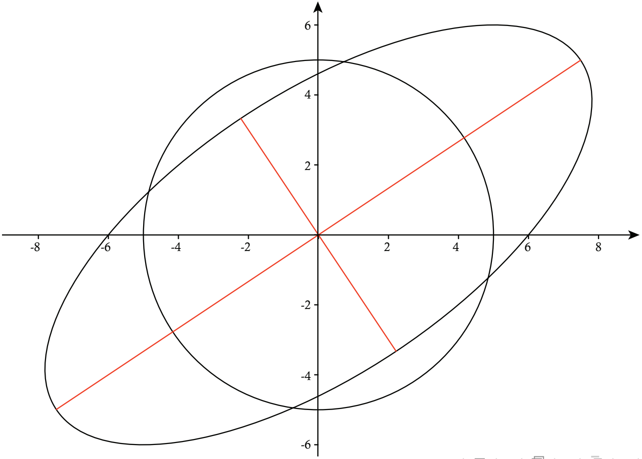
con $a = 5$ e $b = 6$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ corrisponde l'ellisse

$$\boxed{\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + y^2 = 36}$$

un esempio

con $a = 5$ e $b = 6$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ corrisponde l'ellisse

$$\boxed{\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + y^2 = 36}$$



domande e nuovi problemi

1. **Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?**

domande e nuovi problemi

1. Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
2. **Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?**

domande e nuovi problemi

1. Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
2. Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?
3. **Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?**

domande e nuovi problemi

1. Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
2. Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?
3. Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?
4. **Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?**

domande e nuovi problemi

1. Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
2. Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?
3. Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?
4. Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?
5. **Se le punte scriventi sono sia in C sia in D, quale relazione intercorre fra le ellissi che sono disegnate?**

domande e nuovi problemi

1. Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?
2. Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?
3. Esiste qualche posizione di C su AB per cui si ottiene una circonferenza?
4. Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?
5. Se le punte scriventi sono sia in C sia in D, quale relazione intercorre fra le ellissi che sono disegnate?
6. **etc.**

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse
- Altre domande

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse
- Altre domande
  - è possibile una qualche relazione sul moto reciproco di A e di B?

sulla prima domanda

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

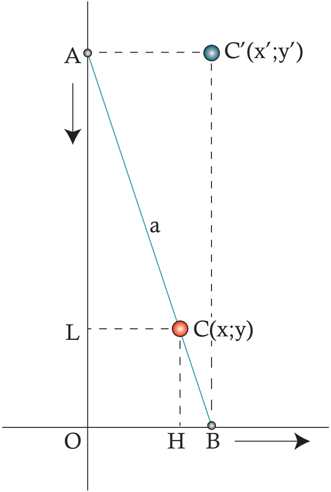
- Il luogo descritto da B è l'intervallo $[-a; a]$ sull'asse delle ascisse
- Altre domande
    - è possibile una qualche relazione sul moto reciproco di A e di B?
    - c'è di mezzo il moto armonico?

sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?

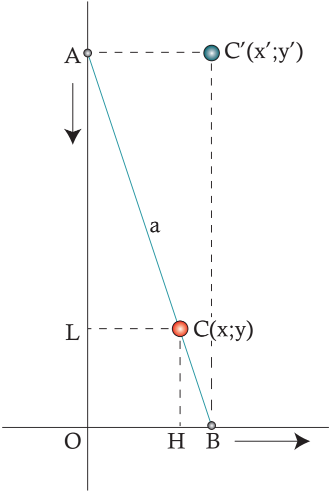
sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?



sulla seconda domanda

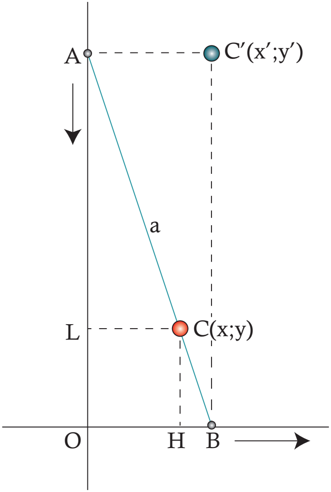
Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?



Per identificare la posizione di C basta porre $k = AB/CB$. Di riflesso per il teor. di Talete:

sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?

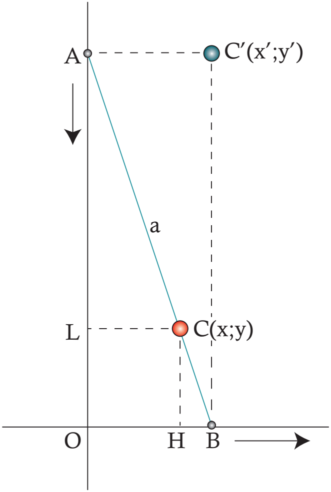


Per identificare la posizione di C basta porre $k = AB/CB$. Di riflesso per il teor. di Talete:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{x'}{x'-x} = k \implies x' = \dfrac{kx}{k-1} \\ \dfrac{y'}{y} = k \implies y' = ky \end{array}}$$

sulla seconda domanda

Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?



Per identificare la posizione di C basta porre $k = AB/CB$. Di riflesso per il teor. di Talete:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x'}{x'-x} = k &\implies x' = \frac{kx}{k-1} \\ \frac{y'}{y} = k &\implies y' = ky \end{aligned}}$$

e mediante quelle formule dalla circonferenza

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

si passa all'ellisse

$$\boxed{\frac{k^2}{(k-1)^2}x^2 + k^2y^2 = a^2.}$$

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- **Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.**

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- **L'affinità si riduce alla semplice omotetia:**

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- L'affinità si riduce alla semplice omotetia:

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

- **e C descrive la circonferenza di centro O con raggio $\frac{a}{2}$.**

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?

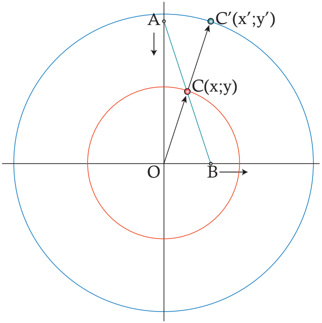
- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- L'affinità si riduce alla semplice omotetia:

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

- e C descrive la circonferenza di centro O con raggio $\frac{a}{2}$.

sulla terza domanda

Esistono numeri k per cui l'ellisse diviene una circonferenza?



- Basta uguagliare i semiassi $\frac{a(k-1)}{k} = \frac{a}{k}$ e ricavare $k = 2$.
- L'affinità si riduce alla semplice omotetia:

$$\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto 2y \end{cases}$$

- e C descrive la circonferenza di centro O con raggio $\frac{a}{2}$.

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.
In tal caso

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x'}{x'-x} &= k \\ \frac{y'}{y} &= k \end{aligned}}$$

sulla quarta domanda

Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.
In tal caso

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{x'}{x'-x} &= k\\ \frac{y'}{y} &= k\end{aligned}}$$

e la circonferenza $x'^2 + y'^2 = a^2$ si trasforma ancora nell'ellisse:

$$\boxed{\frac{k^2}{(k-1)^2}x^2 + k^2y^2 = a^2.}$$

sulla quarta domanda

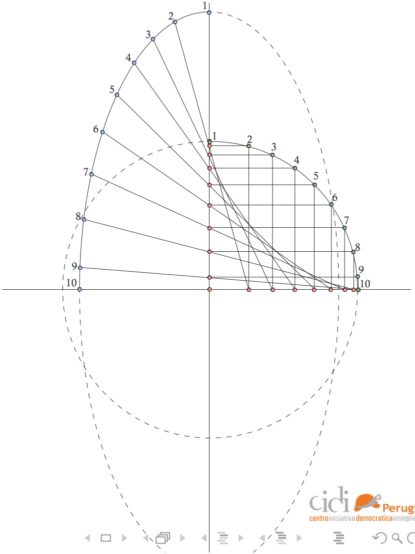
Il punto C potrebbe essere su uno dei due prolungamenti di AB?

Sia C sul prolungamento di AB dalla parte di A in modo che $AB = kBC$ con $k < 1$.
In tal caso

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x'}{x'-x} &= k \\ \frac{y'}{y} &= k \end{aligned}}$$

e la circonferenza $x'^2 + y'^2 = a^2$ si trasforma ancora nell'ellisse:

$$\boxed{\frac{k^2}{(k-1)^2}x^2 + k^2y^2 = a^2.}$$



quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- sistemi lineari, metodo di Cramer $\begin{cases} ax + by = x' \\ cy + dy = y' \end{cases}$

quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- affinità con $O(0;0)$ punto unito $\begin{cases} x \mapsto ax + by \\ y \mapsto cy + dy \end{cases}$, $ad - bc \neq 0$

quali scenari?

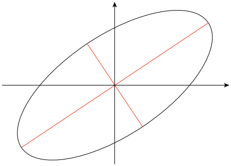
introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- matrici e determinanti 2×2 $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

quali scenari?

introdurre, recuperare, riconoscere, approfondire:

- ellisse non canonica, autovettori . . .



conclusioni

- **riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica**

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica
- **imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze**

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica
- imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze
- **apprezzare e far apprezzare una matematica allo "statu nascendi"**

conclusioni

- riconoscere gli stadi di avanzamento di una attività didattica
- imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze
- apprezzare e far apprezzare una matematica allo “statu nascendi”
- **far capire che una ricerca non ha termine perché in quanto tale conduce ad altra ricerca.**

grazie
per l'attenzione