Laboratorio CIDI

presso

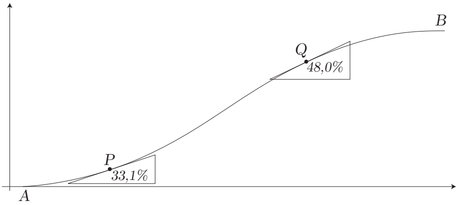
Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

1 aprile 2014

valerio.scorsipa@alice.it

variazioni e differenze

un avvio storico della derivata



Il variar d'una grandezza
è l'essenza d'ogni percezione
e del mutare è la misura
se con altra è a paragone

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

- la velocità e l'accelerazione istantanea a partire dalla legge oraria;

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

- la velocità e l'accelerazione istantanea a partire dalla legge oraria;
- la tangente ad una curva anche per alcune applicazioni scientifiche;

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

- la velocità e l'accelerazione istantanea a partire dalla legge oraria;
- la tangente ad una curva anche per alcune applicazioni scientifiche;
- i massimi e i minimi di una funzione con importanti conseguenze pratiche (per es., la gittata massima in funzione dell'angolo di sparo nel moto del proiettile).

La tangente a una parabola

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ occorre:

La tangente a una parabola

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ occorre:

1. il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_\circ) + y_\circ \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P

La tangente a una parabola

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ occorre:

1. il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_\circ) + y_\circ \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
2. la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_\circ - ax_\circ^2 = 0$

La tangente a una parabola

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ occorre:

1. il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_\circ) + y_\circ \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
2. la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_\circ - ax_\circ^2 = 0$
3. cond. di tangenza: $\Delta = m^2 - 4a(mx_\circ - ax_\circ^2) = (m - 2ax_\circ)^2 = 0 \implies m = 2ax_\circ$

La tangente a una parabola

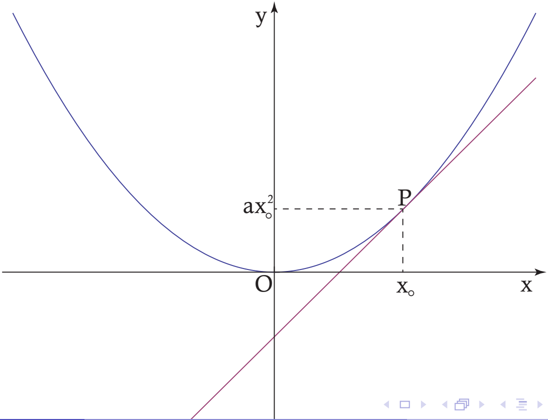
Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ occorre:

1. il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_\circ) + y_\circ \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
2. la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_\circ - ax_\circ^2 = 0$
3. cond. di tangenza: $\Delta = m^2 - 4a(mx_\circ - ax_\circ^2) = (m - 2ax_\circ)^2 = 0 \implies m = 2ax_\circ$
4. retta tangente: $y = 2ax_\circ x - ax_\circ^2$

La tangente a una parabola

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ occorre:

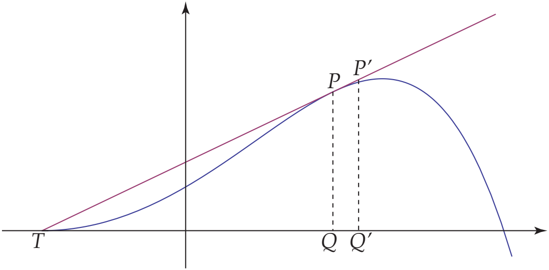
1. il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_\circ) + y_\circ \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
2. la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_\circ - ax_\circ^2 = 0$
3. cond. di tangenza: $\Delta = m^2 - 4a(mx_\circ - ax_\circ^2) = (m - 2ax_\circ)^2 = 0 \implies m = 2ax_\circ$
4. retta tangente: $y = 2ax_\circ x - ax_\circ^2$



metodo di Fermat

$P(a; f(a))$ è il punto della curva algebrica $y = f(x)$ nel quale si vuol trovare la tangente, il punto $P'(a + E; f(a + E))$ è prossimo a P allora i triangoli TPQ e $TP'Q'$ sono da considerare simili così che:

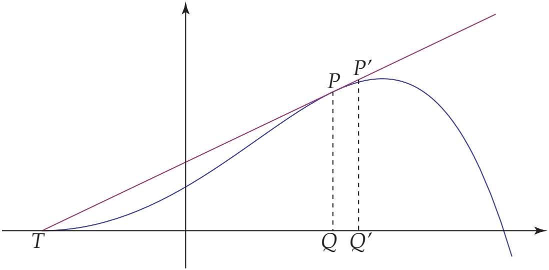
$$\boxed{\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}, \text{ dove } c = TQ \text{ è la sottotangente}}$$



metodo di Fermat

$P(a; f(a))$ è il punto della curva algebrica $y = f(x)$ nel quale si vuol trovare la tangente, il punto $P'(a+E; f(a+E))$ è prossimo a P allora i triangoli TPQ e $TP'Q'$ sono da considerare simili così che:

$$\boxed{\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}, \text{ dove } c = TQ \text{ è la sottotangente}}$$



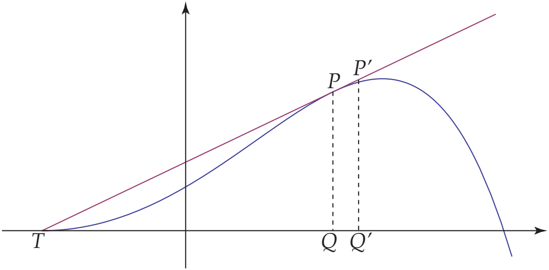
da cui

$$\boxed{\frac{f(a+E)-f(a)}{E} = \frac{f(a)}{c}}$$

metodo di Fermat

$P(a; f(a))$ è il punto della curva algebrica $y = f(x)$ nel quale si vuol trovare la tangente, il punto $P'(a+E; f(a+E))$ è prossimo a P allora i triangoli TPQ e $TP'Q'$ sono da considerare simili così che:

$$\boxed{\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}, \text{ dove } c = TQ \text{ è la sottotangente}}$$

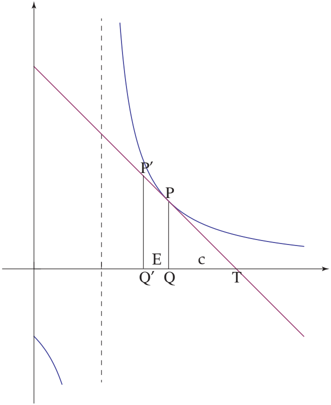


da cui

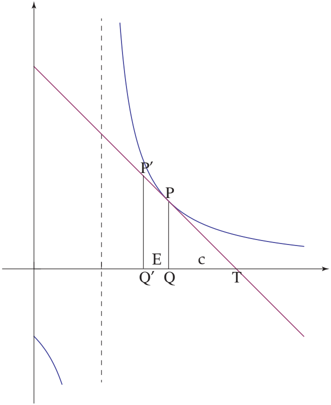
$$\boxed{\frac{f(a+E)-f(a)}{E} = \frac{f(a)}{c}}$$

semplificando e posto $E = 0$, si ricava c e quindi la pendenza della tangente $\frac{f(a)}{c}$.

esempio alla "Fermat"

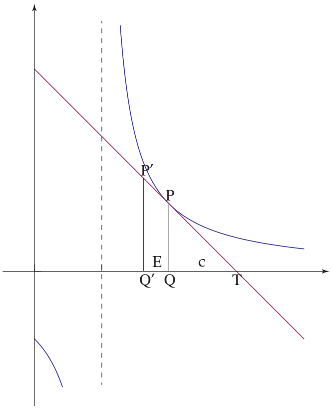


esempio alla “Fermat”



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

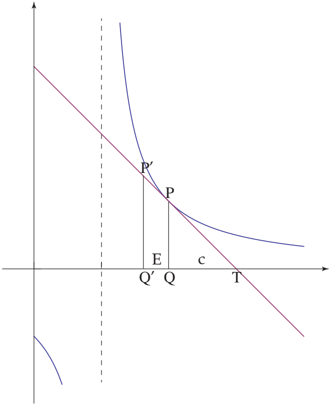
esempio alla "Fermat"



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

esempio alla “Fermat”

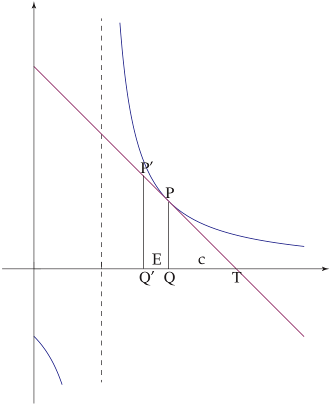


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

$$(c-E)(a-E-1) = c(a-1)$$

esempio alla "Fermat"

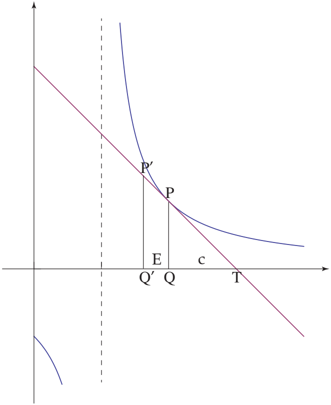


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

$$(c-E)(a-E-1) = c(a-1)$$
$$c(a-1) - cE - E(a-E-1) = c(a-1)$$

esempio alla "Fermat"

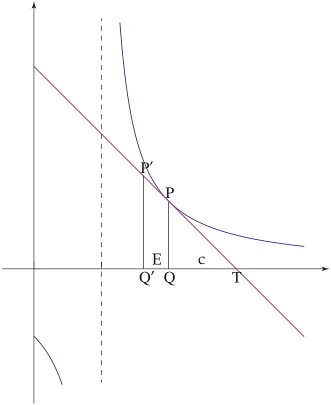


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

$$(c-E)(a-E-1) = c(a-1)$$
$$c(a-1) - cE - E(a-E-1) = c(a-1)$$
$$\textit{(si semplifica E)} \quad cE = -E(a-E-1)$$

esempio alla “Fermat”

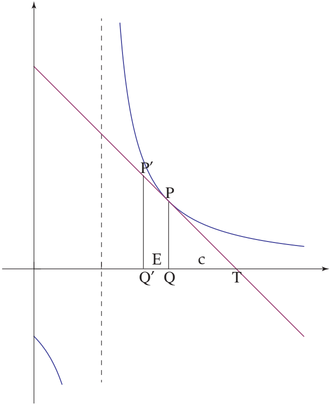


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

$$\begin{aligned} (c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ \textit{(si semplifica } E\textit{)} \qquad cE &= -E(a-E-1) \\ c &= -(a-E-1) \end{aligned}$$

esempio alla "Fermat"



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

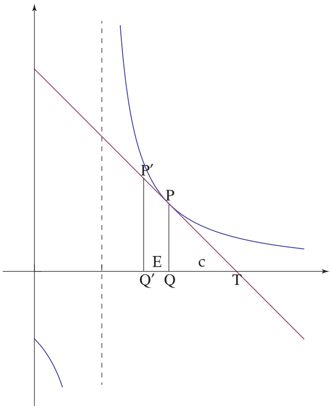
$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

$$\begin{aligned} (c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ \textit{(si semplifica E)} \quad cE &= -E(a-E-1) \\ c &= -(a-E-1) \end{aligned}$$

da cui $\frac{PQ}{QT} = \cdots$

$$= -\frac{\frac{1}{a-1}}{a-E-1} \text{ e con } E = 0 \ldots$$

esempio alla "Fermat"



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$, $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\boxed{\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{a-E-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{a-E-1}}$$

$$\begin{aligned} (c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ \textit{(si semplifica E)} \qquad cE &= -E(a-E-1) \\ c &= -(a-E-1) \end{aligned}$$

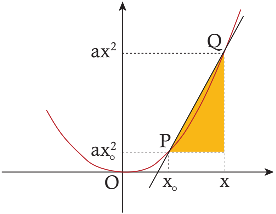
da cui $\frac{PQ}{QT} = \cdots$

$$= -\frac{\frac{1}{a-1}}{a-E-1} \text{ e con } E = 0 \ldots \boxed{-\frac{1}{(a-1)^2}}$$

= invece di ⟶

Metodo di Fermat

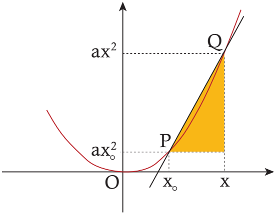
Dati i punti $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



P. Fermat (1601-1665)

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:

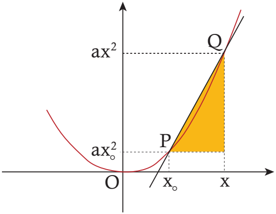


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - ax_\circ^2}{x - x_\circ} = \frac{a(x + x_\circ)(x - x_\circ)}{x - x_\circ}$$

P. Fermat (1601-1665)

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - ax_\circ^2}{x - x_\circ} = \frac{a(x + x_\circ)(x - x_\circ)}{x - x_\circ}$$

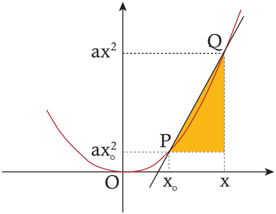
che per $x \neq x_\circ$ diviene

$$\boxed{m = a(x + x_\circ)}$$

P. Fermat (1601-1665)

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_\circ, ax_\circ^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - ax_\circ^2}{x - x_\circ} = \frac{a(x + x_\circ)(x - x_\circ)}{x - x_\circ}$$

che per $x \neq x_\circ$ diviene

$$\boxed{m = a(x + x_\circ)}$$

P. Fermat (1601-1665)

ma ...

$$a(x + x_\circ) \underset{x \to x_\circ}{\longrightarrow} \boxed{2ax_\circ}$$

principio di continuità

Per Leibniz vale *il principio di continuità* secondo il quale la natura non procede a salti.

principio di continuità

Per Leibniz vale *il principio di continuità* secondo il quale la natura non procede a salti.
Quando x diventa $x_\circ$ sono possibili infiniti quozienti per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma, per quel principio, sarà da scegliere $2ax_\circ$ valore cui $m = a(x + x_\circ)$ si approssima al tendere di x a $x_\circ$.

principio di continuità

Per Leibniz vale *il principio di continuità* secondo il quale la natura non procede a salti.
Quando x diventa $x_\circ$ sono possibili infiniti quozienti per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma, per quel principio, sarà da scegliere $2ax_\circ$ valore cui $m = a(x + x_\circ)$ si approssima al tendere di x a $x_\circ$.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_\circ = 1$.

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_\circ = 1$. La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

che si semplifica in $2(x+1)$ per $x \neq 1$.

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_\circ = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

che si semplifica in $2(x+1)$ per $x \neq 1$.
Per il principio di continuità possiamo superare la forma indeterminata:

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_\circ = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

che si semplifica in $2(x+1)$ per $x \neq 1$.
Per il principio di continuità possiamo superare la forma indeterminata:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	$\cdots$	≈ 1
$2(x+1)$	3,8	3,98	3,998	3,9998	$\cdots$	≈ 4

cidi Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_\circ = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

che si semplifica in $2(x+1)$ per $x \neq 1$.
Per il principio di continuità possiamo superare la forma indeterminata:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	$\cdots$	≈ 1
$2(x+1)$	3,8	3,98	3,998	3,9998	$\cdots$	≈ 4

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	$\cdots$	≈ 1
$2(x+1)$	4,2	4,02	4,002	4,0002	$\cdots$	≈ 4

oltre la funzione quadratica

Quale è la pendenza della tangente alla cubica $y = x^3 - x$ nel suo punto di ascissa $x_\circ$?

oltre la funzione quadratica

Quale è la pendenza della tangente alla cubica $y = x^3 - x$ nel suo punto di ascissa $x_\circ$?
Il rapporto incrementale rispetto ai punti di ascissa $x_\circ$ e x

$$\begin{aligned}\frac{(x^3 - x) - (x_\circ^3 - x_\circ)}{x - x_\circ} &= \frac{(x^3 - x_\circ^3) - (x - x_\circ)}{x - x_\circ} \\ &= \frac{(x - x_\circ)(x^2 + xx_\circ + x_\circ^2) - (x - x_\circ)}{x - x_\circ} \\ &= \frac{(x - x_\circ)(x^2 + xx_\circ + x_\circ^2 - 1)}{x - x_\circ}\end{aligned}$$

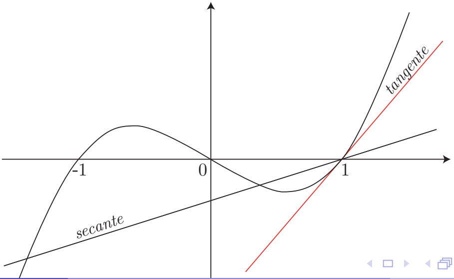
oltre la funzione quadratica

Quale è la pendenza della tangente alla cubica $y = x^3 - x$ nel suo punto di ascissa $x_\circ$?
Il rapporto incrementale rispetto ai punti di ascissa $x_\circ$ e x

$$\begin{aligned}\frac{(x^3 - x) - (x_\circ^3 - x_\circ)}{x - x_\circ} &= \frac{(x^3 - x_\circ^3) - (x - x_\circ)}{x - x_\circ} \\ &= \frac{(x - x_\circ)(x^2 + xx_\circ + x_\circ^2) - (x - x_\circ)}{x - x_\circ} \\ &= \frac{(x - x_\circ)(x^2 + xx_\circ + x_\circ^2 - 1)}{x - x_\circ}\end{aligned}$$

per $x \neq x_\circ$ diviene $x^2 + xx_\circ + x_\circ^2 - 1$ e sostituendo $x_\circ$ a x, la pendenza della tangente sarà

$$\boxed{3x_\circ^2 - 1}$$



una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa $x_\circ$

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_\circ^2 - 1)(x - x_\circ) + x_\circ^3 - x_\circ \end{cases}$$

una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa $x_\circ$

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_\circ^2 - 1)(x - x_\circ) + x_\circ^3 - x_\circ \end{cases}$$

si ottiene la cubica:

$$\boxed{x^3 - 3x_\circ^2 x + 2x_\circ^3 = 0}$$

che mediante la regola di Ruffini

una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa $x_\circ$

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_\circ^2 - 1)(x - x_\circ) + x_\circ^3 - x_\circ \end{cases}$$

si ottiene la cubica:

$$\boxed{x^3 - 3x_\circ^2 x + 2x_\circ^3 = 0}$$

che mediante la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|cc|c|c}
 & 1 & 0 & -3x_\circ^2 & 2x_\circ^3 \\
x_\circ & & x_\circ & x_\circ^2 & -2x_\circ^3 \\
\hline
 & 1 & x_\circ & -2x_\circ^2 & 0 \\
x_\circ & & x_\circ & 2x_\circ^2 & \\
\hline
 & 1 & 2x_\circ & 0 &
\end{array}$$

diviene:

una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa $x_\circ$

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_\circ^2 - 1)(x - x_\circ) + x_\circ^3 - x_\circ \end{cases}$$

si ottiene la cubica:

$$\boxed{x^3 - 3x_\circ^2 x + 2x_\circ^3 = 0}$$

che mediante la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|cc|c|c}
 & 1 & 0 & -3x_\circ^2 & 2x_\circ^3 \\
x_\circ & & x_\circ & x_\circ^2 & -2x_\circ^3 \\
\hline
 & 1 & x_\circ & -2x_\circ^2 & 0 \\
x_\circ & & x_\circ & 2x_\circ^2 & \\
\hline
 & 1 & 2x_\circ & 0 &
\end{array}$$

diviene:

$$\boxed{(x - x_\circ)^2 (x + 2x_\circ) = 0}$$

schema operativo di Fermat

schema operativo di Fermat

1. Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x.

schema operativo di Fermat

1. Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x.

2. Trasformiamo l'espressione del rapporto incrementale, cercando di semplificarne i termini per h.

schema operativo di Fermat

1. Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x.

2. Trasformiamo l'espressione del rapporto incrementale, cercando di semplificarne i termini per h.

3. Poniamo $h = 0$ nell'espressione semplificata del rapporto incrementale ottenendo $f'(x)$, pendenza della tangente alla curva in $(x; f(x))$.

schema operativo di Fermat

1. Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x.
2. Trasformiamo l'espressione del rapporto incrementale, cercando di semplificarne i termini per h.
3. Poniamo $h = 0$ nell'espressione semplificata del rapporto incrementale ottenendo $f'(x)$, pendenza della tangente alla curva in $(x; f(x))$.
4. Al variare di x si ottiene la funzione $y = f'(x)$ che è la $\boxed{\text{derivata}}$ di $y = f(x)$.

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

1. costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_\circ$$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

1. costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_\circ$$

2. trasformiamo il rapporto incrementale e semplifichiamo per h:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} && \text{(razionalizzando il numeratore)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} && \text{(semplificando per } h \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

1. costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_\circ$$

2. trasformiamo il rapporto incrementale e semplifichiamo per h:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} && \text{(razionalizzando il numeratore)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} && \text{(semplificando per } h \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

3. otteniamo con $h = 0$ la pendenza della tangente in $(x; \sqrt{x})$: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

1. costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_\circ$$

2. trasformiamo il rapporto incrementale e semplifichiamo per h:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} && \text{(razionalizzando il numeratore)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} && \text{(semplificando per } h \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

3. otteniamo con $h = 0$ la pendenza della tangente in $(x; \sqrt{x})$: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

4. abbiamo al variare di $x \in \mathbb{R}^+$ la funzione derivata $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ}$$

con la regola di Ruffini

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_\circ^n \\ & & & & & & \\ x_\circ & & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & x_\circ^n \\ \hline & 1 & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & 0 \end{array}$$

diviene:

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_\circ^n \\
 & & & & & & \\
x_\circ & & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & x_\circ^n \\
\hline
 & 1 & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & 0
\end{array}$$

diviene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - x_\circ)(x^{n-1} + x_\circ x^{n-2} + \cdots + x_\circ^{n-2} x + x_\circ^{n-1})}{x - x_\circ};$$

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_\circ^n \\
 & & & & & & \\
x_\circ & & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & x_\circ^n \\
\hline
 & 1 & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & 0
\end{array}$$

diviene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - x_\circ)(x^{n-1} + x_\circ x^{n-2} + \cdots + x_\circ^{n-2} x + x_\circ^{n-1})}{x - x_\circ};$$

dalla forma semplificata si trae al solito modo:

$$x^{n-1} + x_\circ x^{n-2} + \cdots + x_\circ^{n-2} x + x_\circ^{n-1} \underset{x \to x_\circ}{\longrightarrow}$$

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_\circ^n \\
x_\circ & & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & x_\circ^n \\
\hline
 & 1 & x_\circ & x_\circ^2 & \cdots & x_\circ^{n-1} & 0
\end{array}$$

diviene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - x_\circ)(x^{n-1} + x_\circ x^{n-2} + \cdots + x_\circ^{n-2} x + x_\circ^{n-1})}{x - x_\circ};$$

dalla forma semplificata si trae al solito modo:

$$x^{n-1} + x_\circ x^{n-2} + \cdots + x_\circ^{n-2} x + x_\circ^{n-1} \xrightarrow[x \to x_\circ]{} \boxed{n x_\circ^{n-1}}$$

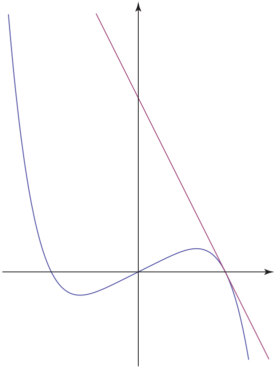
cidi Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

una notazione

La funzione $y = f(x)$ di dominio A è derivabile in $x \in A$ se esiste un solo $f'(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x)$$

con $x + h \in A$.
$f'(x)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto $(x; f(x))$.



il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione	derivata

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3	$x \mapsto \frac{1}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$x \mapsto -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3	$x \mapsto \frac{1}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$x \mapsto -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
4	$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$x \mapsto \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

il calcolo con le derivate

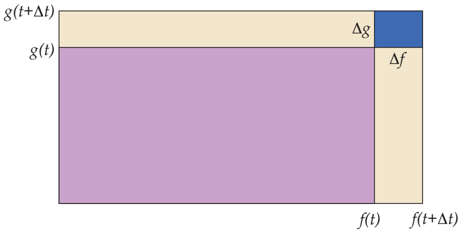
$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3	$x \mapsto \frac{1}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$x \mapsto -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
4	$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$x \mapsto \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
5	$x \mapsto f(g(x))$	$x \mapsto f'(g(x)) \cdot g'(x)$

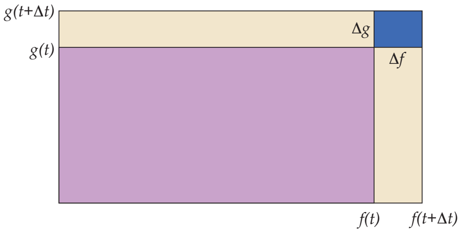
cidi Perugia centro iniziativa democratica insegnanti

metafora per il prodotto

metafora per il prodotto



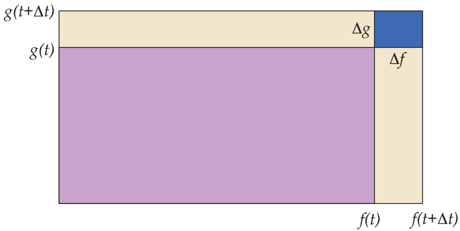
metafora per il prodotto



$$\frac{f(t+\Delta t)\cdot g(t+\Delta t)-f(t)\cdot g(t)}{\Delta t}$$

cidi Perugia
centro iniziativa democratica insegnanti

metafora per il prodotto



$$\frac{f(t+\Delta t)\cdot g(t+\Delta t)-f(t)\cdot g(t)}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot g(t) + f(t)\cdot \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t} +$$

$$+\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot [g(t+\Delta t)-g(t)]$$

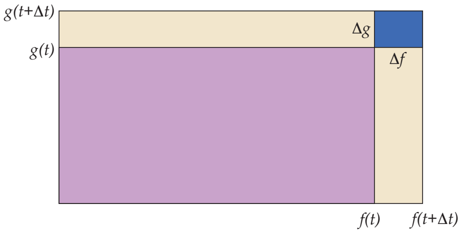
metafora per il prodotto

$$\frac{f(t+\Delta t)\cdot g(t+\Delta t)-f(t)\cdot g(t)}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot g(t)+f(t)\cdot\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}+$$

$$+\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot[g(t+\Delta t)-g(t)]$$

$$=\frac{\Delta f}{\Delta t}\cdot g(t)+f(t)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta t}+\frac{\Delta f}{\Delta t}\cdot\Delta g$$

metafora per il prodotto



$$
\begin{aligned}
\frac{f(t+\Delta t)\cdot g(t+\Delta t)-f(t)\cdot g(t)}{\Delta t} &= \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot g(t) + f(t)\cdot \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t} + \\
&+ \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot [g(t+\Delta t)-g(t)] \\
&= \frac{\Delta f}{\Delta t}\cdot g(t) + f(t)\cdot \frac{\Delta g}{\Delta t} + \frac{\Delta f}{\Delta t}\cdot \Delta g \\
&\underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \boxed{f'(t)g(t)+f(t)g'(t)}
\end{aligned}
$$

derivabile $\Longrightarrow$ continua

derivabile $\Longrightarrow$ continua

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \quad f'(x)$$

$$\Downarrow$$

derivabile $\Longrightarrow$ continua

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f'(x) \cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

derivabile $\Longrightarrow$ continua

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \quad f'(x)$$

$$\Downarrow$$

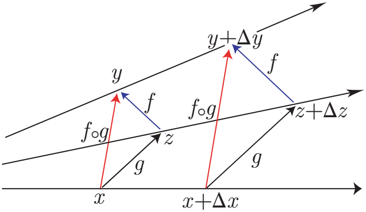
$$f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot \Delta x \quad \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \quad f'(x)\cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

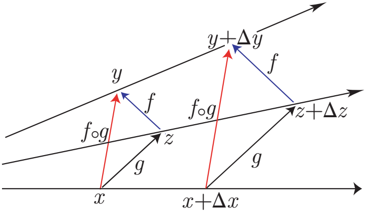
$$f(x+\Delta x) \quad \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \quad f(x)$$

derivata f(g(x))

derivata f(g(x))

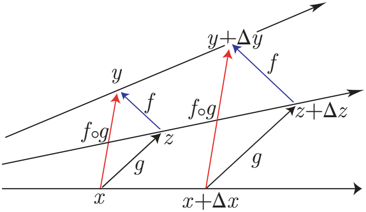


derivata f(g(x))



Per $\Delta x \to 0$ anche $\Delta z \to 0$ e $\Delta y \to 0$
Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

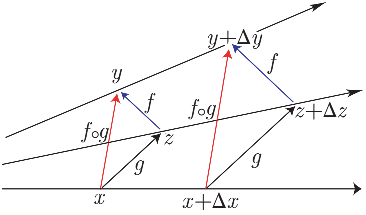
derivata f(g(x))



Per $\Delta x \to 0$ anche $\Delta z \to 0$ e $\Delta y \to 0$
Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

derivata f(g(x))



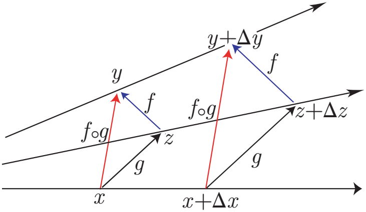
Per $\Delta x \to 0$ anche $\Delta z \to 0$ e $\Delta y \to 0$
Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\
&= f'(z) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

derivata f(g(x))



Per $\Delta x \to 0$ anche $\Delta z \to 0$ e $\Delta y \to 0$
Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

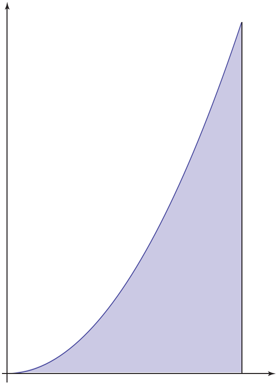
Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\ &= f'(z) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Concludendo $\boxed{(f \circ g(x))' = f'(z) \cdot g'(x), \quad \text{con} \quad z = g(x)}$

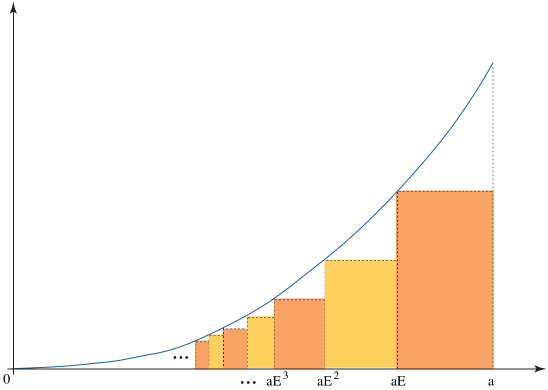
parabole e iperboli di Fermat

loro quadratura

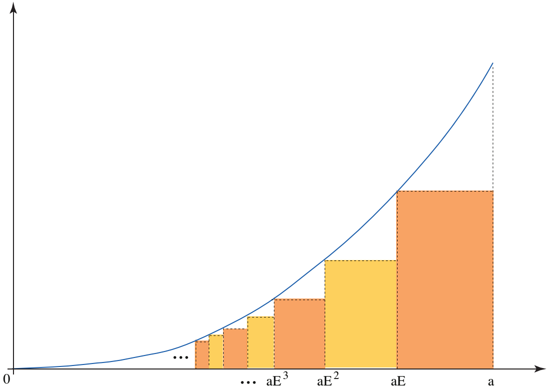


parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$

parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$

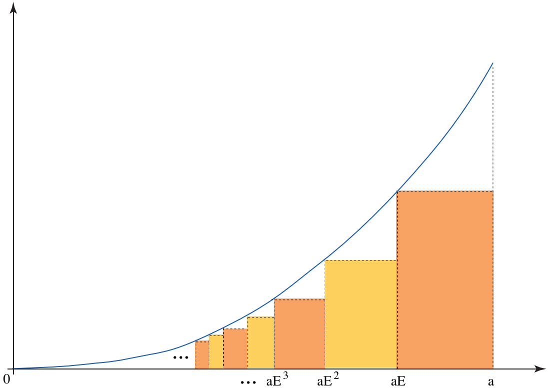


parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$



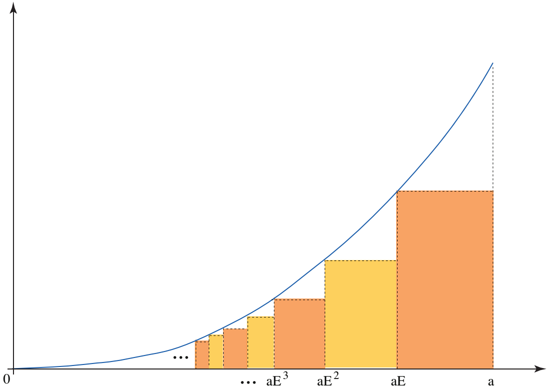
- $R_1 = (a - aE)a^m E^m = \boxed{a^{m+1}E^m(1-E)}$

parabole di Fermat: $f(x) = x^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$



- $R_1 = (a - aE)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (1 - E)}$
- $R_2 = (aE - aE^2)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (1 - E)}$

parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$



- $R_1 = (a - aE)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (1 - E)}$
- $R_2 = (aE - aE^2)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (1 - E)}$
- $R_3 = (aE^2 - aE^3)a^m E^{3m} = \boxed{a^{m+1} E^{3m+2} (1 - E)}$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(1 - E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(1 - E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1)\cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1 - E)}{1 - E^{m+1}}$$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(1-E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1)\cdot n}}{1 - E^{m+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_1 \cdot \frac{1}{1-E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1-E)}{1-E^{m+1}}$$
- $$a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1-E)}{1-E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1+E+E^2+\cdots+E^m}$$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

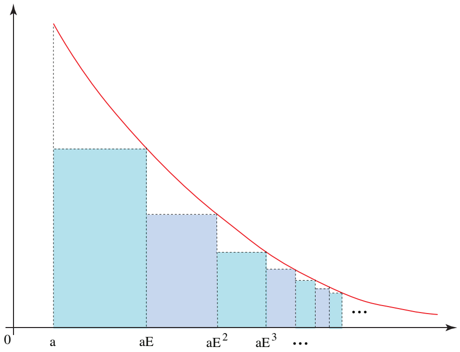
$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(1-E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

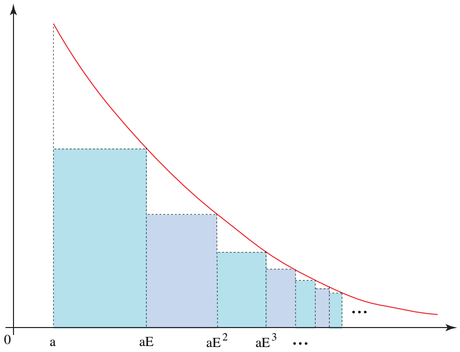
- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1)\cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} R_1 \cdot \frac{1}{1-E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1-E)}{1-E^{m+1}}$$
- $$a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1-E)}{1-E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1+E+E^2+\cdots+E^m}$$
- $$a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1+E+E^2+\cdots+E^m} \xrightarrow[E\to 1^-]{} \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$

iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$

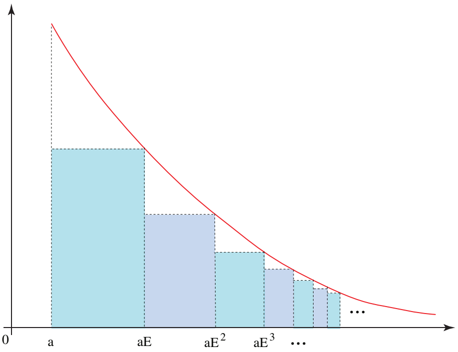


iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$



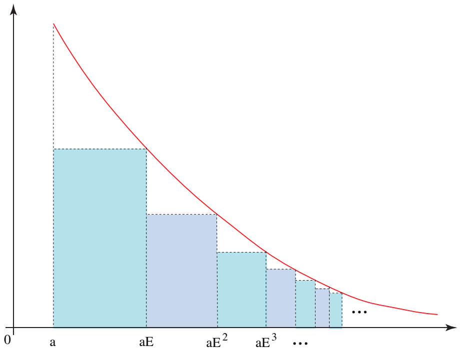
- $R_1 = (aE - a)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (E - 1)}$

iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$



- $R_1 = (aE - a)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (E-1)}$
- $R_2 = (aE^2 - aE)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (E-1)}$

iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$



- $R_1 = (aE - a)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (E - 1)}$
- $R_2 = (aE^2 - aE)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (E - 1)}$
- $R_3 = (aE^3 - aE^2)a^m E^{3m} = \boxed{a^{m+1} E^{3m+2} (E - 1)}$

iperboli di Fermat

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(E-1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(E-1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1-E^{(m+1)\cdot n}}{1-E^{m+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} R_1 \cdot \frac{1}{1-E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m(E-1)}{1-E^{m+1}}$$

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(E-1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1)\cdot n}}{1 - E^{m+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m(E-1)}{1 - E^{m+1}}$$
- $$-a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1-E)}{1 - E^{m+1}} = -a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1 + E + E^2 + \cdots + E^m}$$

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

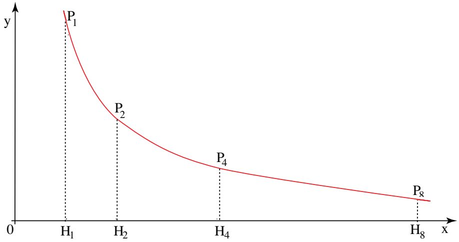
$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1}(E-1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

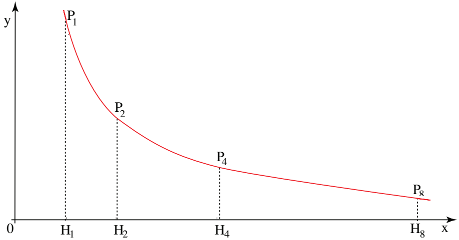
- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1)\cdot n}}{1 - E^{m+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m(E-1)}{1 - E^{m+1}}$$
- $$-a^{m+1} \cdot \frac{E^m(1-E)}{1 - E^{m+1}} = -a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1 + E + E^2 + \cdots + E^m}$$
- $$-a^{m+1} \cdot \frac{1}{E^{-m} + E^{-m-1} + E^{-m-2} + \cdots + 1} \underset{E\to 1^+}{\longrightarrow} -\frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$

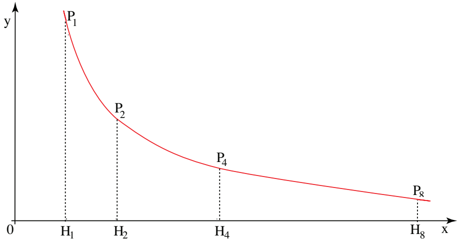


Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$



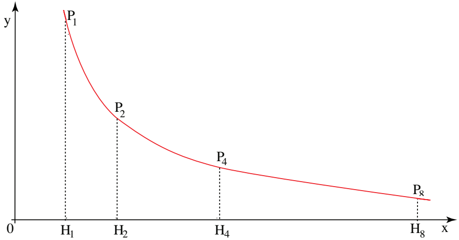
- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$



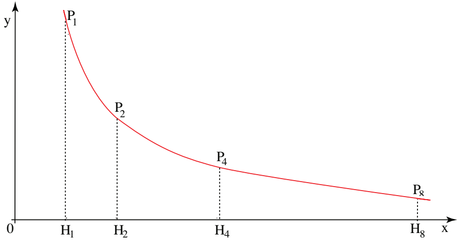
- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- l'area, a_2, del trapezoide $H_{2^k}H_{2^{k+1}}P_{2^{k+1}}P_{2^k}$ è costante per ogni naturale k

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$



- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- l'area, a_2, del trapezoide $H_{2^k}H_{2^{k+1}}P_{2^{k+1}}P_{2^k}$ è costante per ogni naturale k
- $area(1, 2^k) = k \cdot a_2$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$

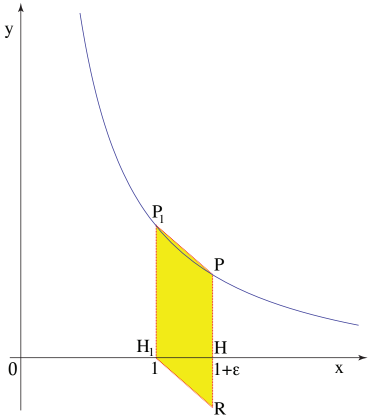


- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- l'area, a_2, del trapezoide $H_{2^k} H_{2^{k+1}} P_{2^{k+1}} P_{2^k}$ è costante per ogni naturale k
- $area(1, 2^k) = k \cdot a_2$
- $area(1, x) = a_2 \cdot \log_2 x$

quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

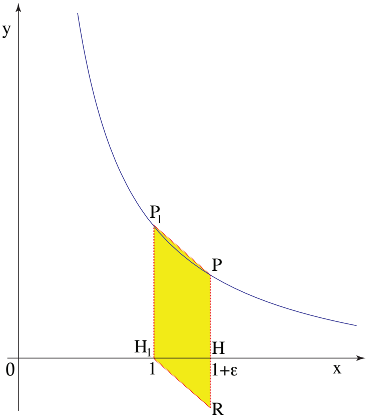
- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \ldots, k^n, \ldots$ con $k > 1$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

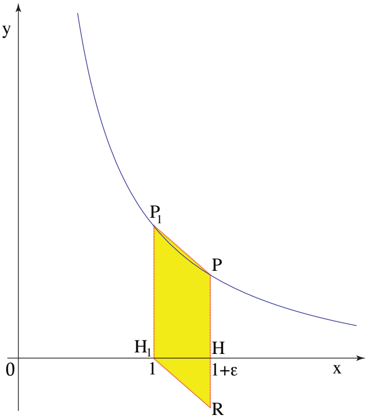
- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \ldots, k^n, \ldots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$ si ottiene

$area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $\boxed{a_k = area(1, k)}$



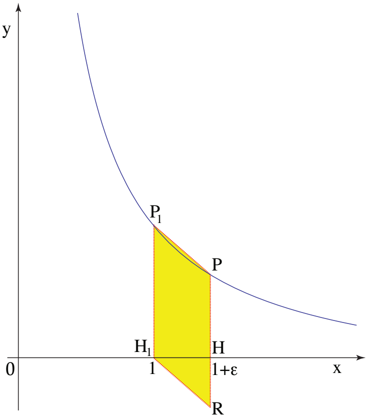
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \ldots, k^n, \ldots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene
  $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $\boxed{a_k = area(1, k)}$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$



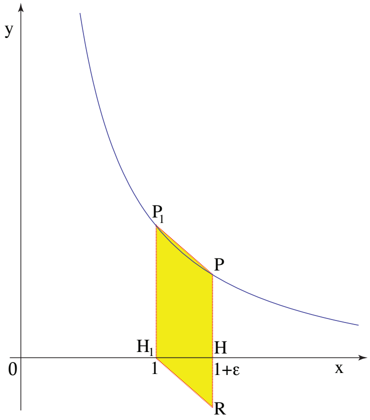
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \ldots, k^n, \ldots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene $\mathit{area}(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $\boxed{a_k = \mathit{area}(1, k)}$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $\mathit{area}(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx \mathit{area}(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$



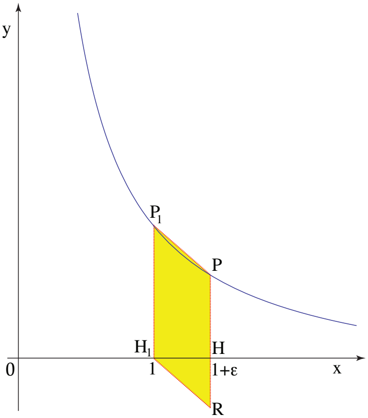
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \ldots, k^n, \ldots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$ si ottiene $\mathit{area}(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $\boxed{a_k = \mathit{area}(1, k)}$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $\mathit{area}(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx \mathit{area}(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$
- per una proprietà dei logaritmi $1 \approx \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$



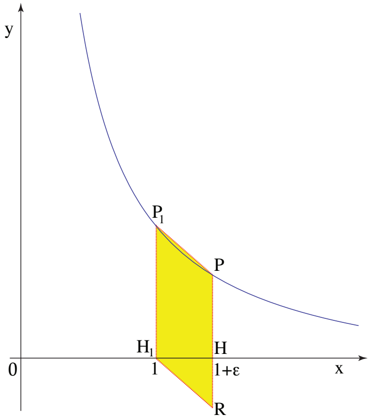
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$ si ottiene
  $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $\boxed{a_k = area(1, k)}$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $area(P_1 H_1 RP) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx area(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$
- per una proprietà dei logaritmi $1 \approx \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$
- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \implies k = e$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

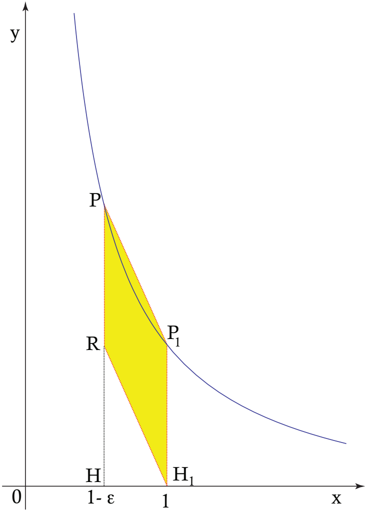
- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \ldots, k^n, \ldots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$ si ottiene $\mathit{area}(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $\boxed{a_k = \mathit{area}(1, k)}$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $\mathit{area}(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx \mathit{area}(1, 1+\varepsilon) = \log_k(1+\varepsilon)$
- per una proprietà dei logaritmi $1 \approx \log_k(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$
- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \log_k(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \implies k = e$
- $\boxed{\mathit{area}(1, x) = \ln x}$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

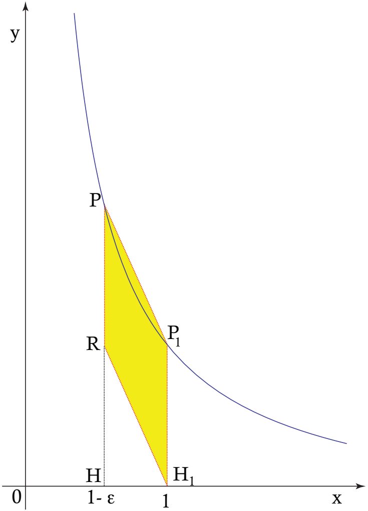
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$



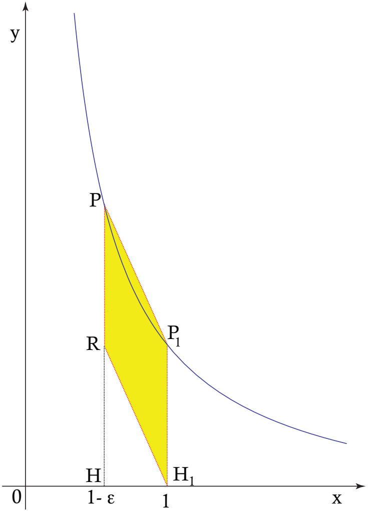
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$



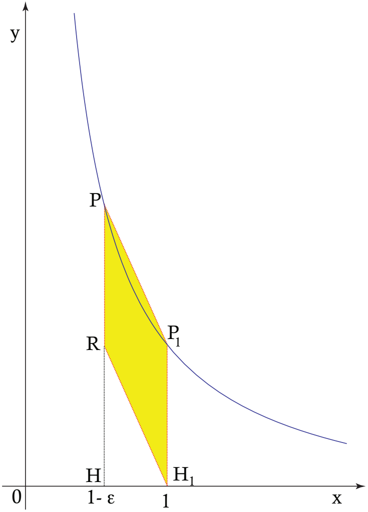
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.



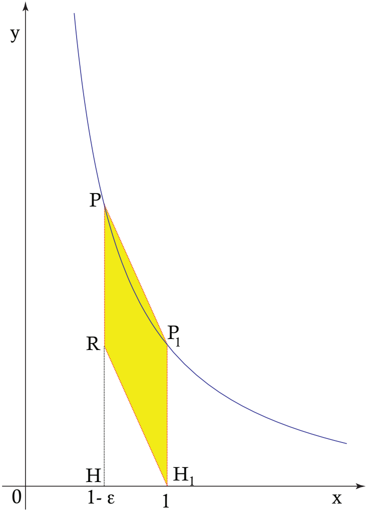
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\dfrac{1}{k^{n+1}}; \dfrac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x;1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$



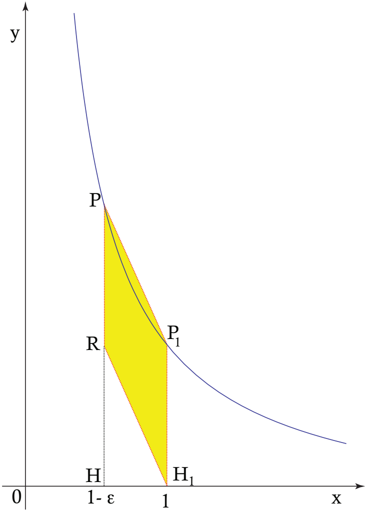
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x;1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.



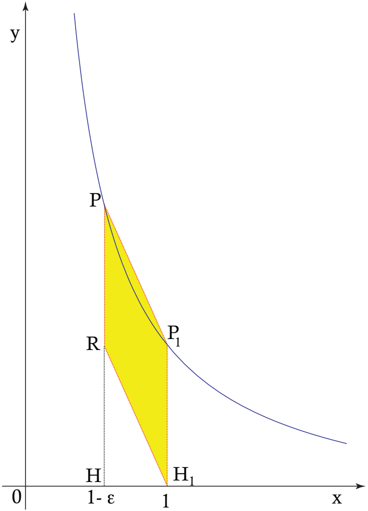
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x;1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1-\varepsilon)|$



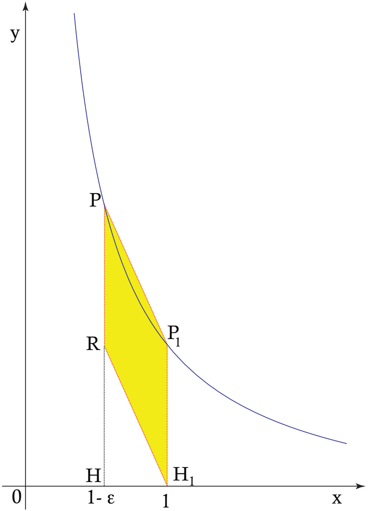
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\dfrac{1}{k^{n+1}}; \dfrac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1 - \varepsilon)|$
- e dunque $1 \approx |\log_k(1 - \varepsilon)^{\varepsilon}|$



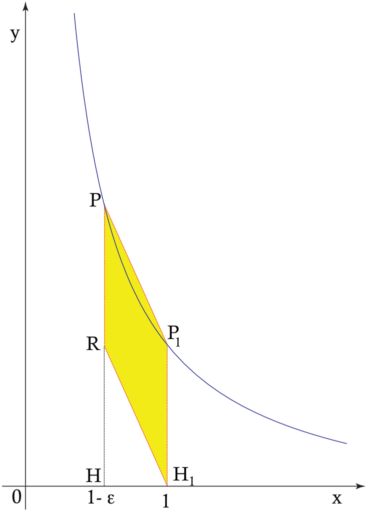
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 RP) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1-\varepsilon)|$
- e dunque $1 \approx |\log_k(1-\varepsilon)^\varepsilon|$
- essendo $\lim_{\varepsilon \to 0} (1-\varepsilon)^\varepsilon = e^{-1}$ allora $\lim_{\varepsilon \to 0} |\log_k(1-\varepsilon)^\varepsilon| = 1 \implies k = e$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}, \ldots$ con $k > 1$
- $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k} y \end{cases}$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x;1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 RP) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1-\varepsilon)|$
- e dunque $1 \approx |\log_k(1-\varepsilon)^{\varepsilon}|$
- essendo $\lim_{\varepsilon \to 0} (1-\varepsilon)^{\varepsilon} = e^{-1}$ allora $\lim_{\varepsilon \to 0} |\log_k(1-\varepsilon)^{\varepsilon}| = 1 \implies k = e$
- $\boxed{area(x,1) = |\ln x|}$



Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\boxed{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x}$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\boxed{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x}$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma
- la capacità di un condensatore cilindrico

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\boxed{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x}$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma
- la capacità di un condensatore cilindrico
- l'induttanza di un toroide

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\boxed{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x}$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma
- la capacità di un condensatore cilindrico
- l'induttanza di un toroide
- ...