

Laboratorio CIDI

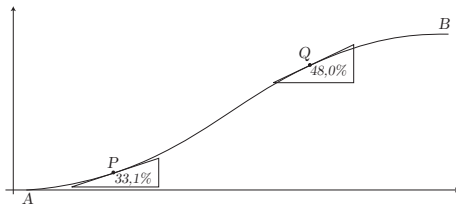
presso
Liceo Scientifico “Galeazzo ALESSI”

1 aprile 2014

valerio.scorsipa@alice.it

variazioni e differenze

un avvio storico della derivata



Il variar d'una grandezza
è l'essenza d'ogni percezione
e del mutare è la misura
se con altra è a paragone

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

- la velocità e l'accelerazione istantanea a partire dalla legge oraria;

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

- la velocità e l'accelerazione istantanea a partire dalla legge oraria;
- la tangente ad una curva anche per alcune applicazioni scientifiche;

il problema delle tangenti nel XVII sec.

Una delle questioni era il problema delle tangenti sostanzialmente rintracciabile lungo tre vie di ricerca:

- la velocità e l'accelerazione istantanea a partire dalla legge oraria;
- la tangente ad una curva anche per alcune applicazioni scientifiche;
- i massimi e i minimi di una funzione con importanti conseguenze pratiche (per es., la gittata massima in funzione dell'angolo di sparo nel moto del proiettile).

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_0, ax_0^2)$ occorre:

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_0, ax_0^2)$ occorre:

- ① il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_0, ax_0^2)$ occorre:

- 1 il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
- 2 la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_0 - ax_0^2 = 0$

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_0, ax_0^2)$ occorre:

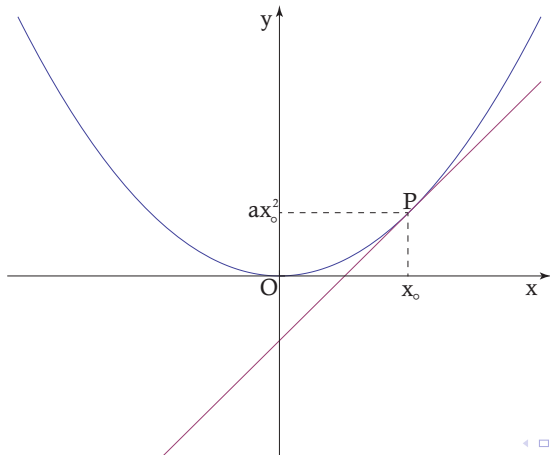
- 1 il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
- 2 la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_0 - ax_0^2 = 0$
- 3 cond. di tangenza: $\Delta = m^2 - 4a(mx_0 - ax_0^2) = (m - 2ax_0)^2 = 0 \implies m = 2ax_0$

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_0, ax_0^2)$ occorre:

- 1 il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
- 2 la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_0 - ax_0^2 = 0$
- 3 cond. di tangenza: $\Delta = m^2 - 4a(mx_0 - ax_0^2) = (m - 2ax_0)^2 = 0 \implies m = 2ax_0$
- 4 retta tangente: $y = 2ax_0x - ax_0^2$

Per trovare la tangente alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto $P(x_0, ax_0^2)$ occorre:

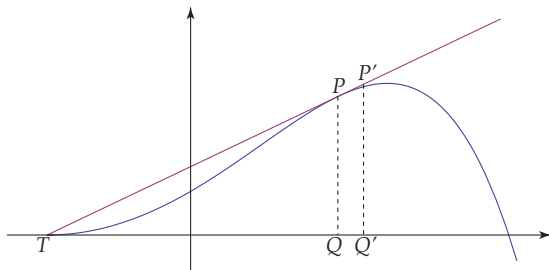
- 1 il sistema $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$ tra la parabola e il fascio di rette di centro P
- 2 la risolvente del sistema: $ax^2 - mx + mx_0 - ax_0^2 = 0$
- 3 cond. di tangenza: $\Delta = m^2 - 4a(mx_0 - ax_0^2) = (m - 2ax_0)^2 = 0 \implies m = 2ax_0$
- 4 retta tangente: $y = 2ax_0x - ax_0^2$



metodo di Fermat

$P(a; f(a))$ è il punto della curva algebrica $y = f(x)$ nel quale si vuol trovare la tangente, il punto $P'(a + E; f(a + E))$ è prossimo a P allora i triangoli TPQ e $TP'Q'$ sono da considerare simili così che:

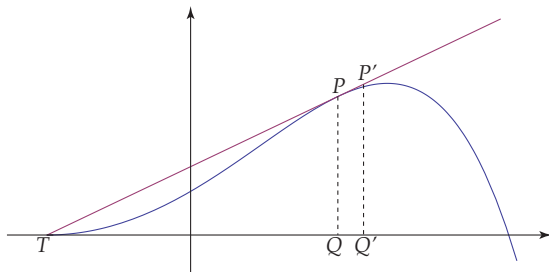
$$\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}, \text{ dove } c = TQ \text{ è la sottotangente}$$



metodo di Fermat

$P(a; f(a))$ è il punto della curva algebrica $y = f(x)$ nel quale si vuol trovare la tangente, il punto $P'(a + E; f(a + E))$ è prossimo a P allora i triangoli TPQ e $TP'Q'$ sono da considerare simili così che:

$$\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}, \text{ dove } c = TQ \text{ è la sottotangente}$$



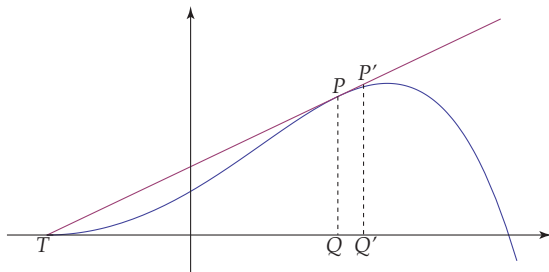
da cui

$$\frac{f(a+E) - f(a)}{E} = \frac{f(a)}{c}$$

metodo di Fermat

$P(a; f(a))$ è il punto della curva algebrica $y = f(x)$ nel quale si vuol trovare la tangente, il punto $P'(a + E; f(a + E))$ è prossimo a P allora i triangoli TPQ e $TP'Q'$ sono da considerare simili così che:

$$\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}, \text{ dove } c = TQ \text{ è la sottotangente}$$

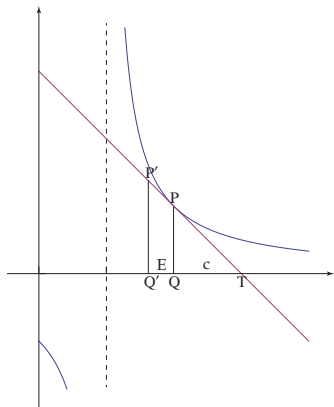


da cui

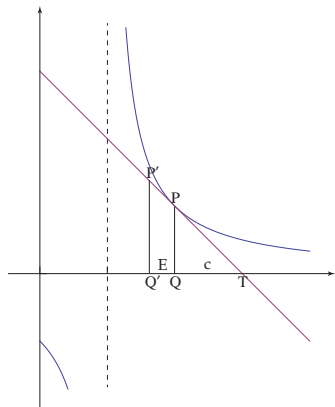
$$\frac{f(a+E)-f(a)}{E} = \frac{f(a)}{c}$$

semplificando e posto $E = 0$, si ricava c e quindi la pendenza della tangente $\frac{f'(a)}$.

esempio alla “Fermat”

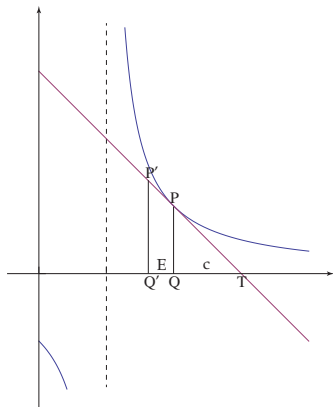


esempio alla “Fermat”



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a - E; f(a - E))$, e $c = TQ$ allora:

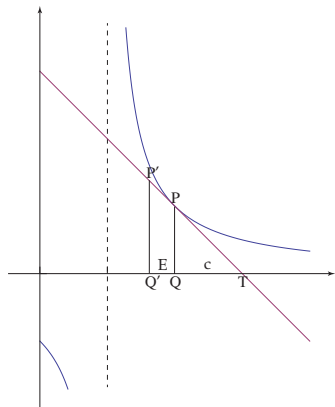
esempio alla “Fermat”



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a - E; f(a - E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

esempio alla “Fermat”

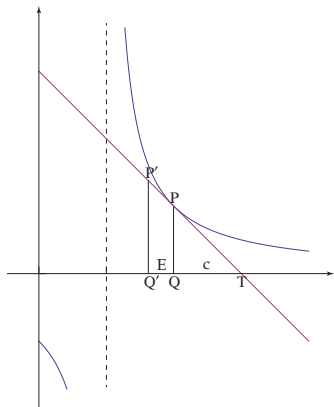


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

$$(c-E)(a-E-1) = c(a-1)$$

esempio alla “Fermat”

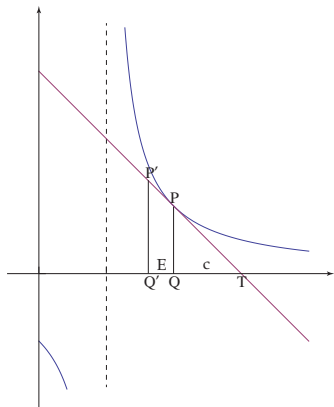


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a - E; f(a - E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

$$(c-E)(a-E-1) = c(a-1)$$
$$c(a-1) - cE - E(a-E-1) = c(a-1)$$

esempio alla “Fermat”

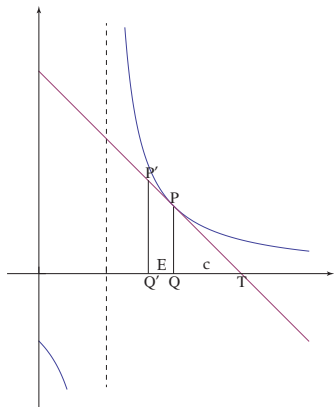


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a - E; f(a - E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

$$\begin{aligned}(c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ (\text{si semplifica } E) \quad cE &= -E(a-E-1)\end{aligned}$$

esempio alla “Fermat”

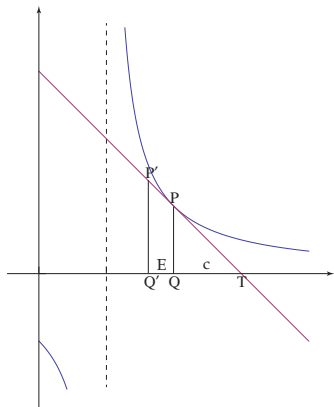


Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a - E; f(a - E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

$$\begin{aligned}(c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ (\text{si semplifica } E) \quad cE &= -E(a-E-1) \\ c &= -(a-E-1)\end{aligned}$$

esempio alla "Fermat"



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a-E; f(a-E))$, e $c = TQ$ allora:

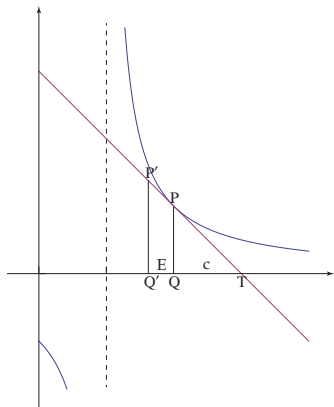
$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

$$\begin{aligned}(c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ (\text{si semplifica } E) \quad cE &= -E(a-E-1) \\ c &= -(a-E-1)\end{aligned}$$

da cui $\frac{PQ}{QT} = \dots$

$$= -\frac{\frac{1}{a-1}}{a-E-1} \text{ e con } E=0 \dots$$

esempio alla “Fermat”



Sia $f(x) = \frac{1}{x-1}$, poniamo $P(a; f(a))$,
 $P'(a - E; f(a - E))$, e $c = TQ$ allora:

$$\frac{\frac{1}{a-1}}{c} = \frac{\frac{1}{(a-E)-1}}{c-E} \implies \frac{c-E}{a-1} = \frac{c}{(a-E)-1}$$

$$\begin{aligned} (c-E)(a-E-1) &= c(a-1) \\ c(a-1) - cE - E(a-E-1) &= c(a-1) \\ \text{(si semplifica } E) \quad cE &= -E(a-E-1) \\ c &= -(a-E-1) \end{aligned}$$

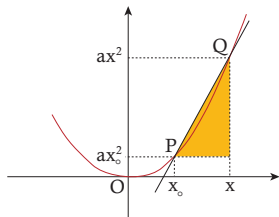
da cui $\frac{PQ}{QT} = \dots$

$$= -\frac{\frac{1}{a-1}}{a-E-1} \text{ e con } E = 0 \dots \boxed{-\frac{1}{(a-1)^2}}$$

= invece di \rightarrow

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_0, ax_0^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



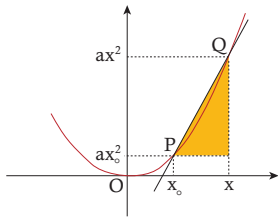
P. Fermat (1601-1665)



= invece di \rightarrow

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_0, ax_0^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

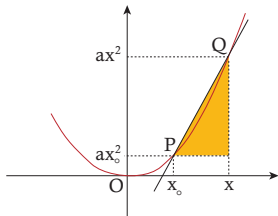
P. Fermat (1601-1665)



= invece di \rightarrow

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_0, ax_0^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

che per $x \neq x_0$ diviene

$$m = a(x + x_0)$$

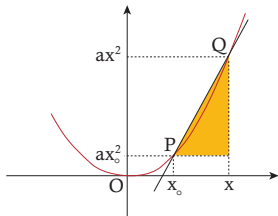
P. Fermat (1601-1665)



= invece di \longrightarrow

Metodo di Fermat

Dati i punti $P(x_0, ax_0^2)$ e $Q(x, ax^2)$ della parabola $y = ax^2$, la retta PQ ha pendenza:



$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

che per $x \neq x_0$ diviene

$$m = a(x + x_0)$$

ma ...

$$a(x + x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2ax_0$$

P. Fermat (1601-1665)



principio di continuità

Per Leibniz vale *il principio di continuità* secondo il quale la natura non procede a salti.

principio di continuità

Per Leibniz vale *il principio di continuità* secondo il quale la natura non procede a salti.

Quando x diventa x_0 sono possibili infiniti quozienti per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma, per quel principio, sarà da scegliere $2ax_0$ valore cui $m = a(x + x_0)$ si approssima al tendere di x a x_0 .

principio di continuità

Per Leibniz vale *il principio di continuità* secondo il quale la natura non procede a salti.

Quando x diventa x_0 sono possibili infiniti quozienti per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma, per quel principio, sarà da scegliere $2ax_0$ valore cui $m = a(x + x_0)$ si approssima al tendere di x a x_0 .



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_0 = 1$.

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_0 = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

che si semplifica in $2(x + 1)$ per $x \neq 1$.

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_0 = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

che si semplifica in $2(x + 1)$ per $x \neq 1$.

Per il principio di continuità possiamo superare la forma indeterminata:

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_0 = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

che si semplifica in $2(x + 1)$ per $x \neq 1$.

Per il principio di continuità possiamo superare la forma indeterminata:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	...	≈ 1
$2(x + 1)$	3,8	3,98	3,998	3,9998	...	≈ 4

Un esempio

Della parabola $y = 2x^2$ calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in $x_0 = 1$.
La pendenza della secante che unisce i punti di ascissa 1 e x è

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

che si semplifica in $2(x + 1)$ per $x \neq 1$.

Per il principio di continuità possiamo superare la forma indeterminata:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	...	≈ 1
$2(x + 1)$	3,8	3,98	3,998	3,9998	...	≈ 4

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	...	≈ 1
$2(x + 1)$	4,2	4,02	4,002	4,0002	...	≈ 4

oltre la funzione quadratica

Quale è la pendenza della tangente alla cubica $y = x^3 - x$ nel suo punto di ascissa x_0 ?

oltre la funzione quadratica

Quale è la pendenza della tangente alla cubica $y = x^3 - x$ nel suo punto di ascissa x_0 ?

Il rapporto incrementale rispetto ai punti di ascissa x_0 e x

$$\begin{aligned}\frac{(x^3 - x) - (x_0^3 - x_0)}{x - x_0} &= \frac{(x^3 - x_0^3) - (x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) - (x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 - 1)}{x - x_0}\end{aligned}$$

oltre la funzione quadratica

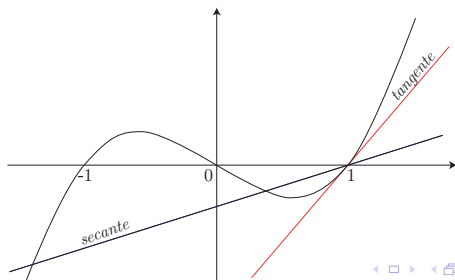
Quale è la pendenza della tangente alla cubica $y = x^3 - x$ nel suo punto di ascissa x_0 ?

Il rapporto incrementale rispetto ai punti di ascissa x_0 e x

$$\begin{aligned}\frac{(x^3 - x) - (x_0^3 - x_0)}{x - x_0} &= \frac{(x^3 - x_0^3) - (x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) - (x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 - 1)}{x - x_0}\end{aligned}$$

per $x \neq x_0$ diviene $x^2 + xx_0 + x_0^2 - 1$ e sostituendo x_0 a x , la pendenza della tangente sarà

$$3x_0^2 - 1$$



una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa x_0

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0 \end{cases}$$

una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa x_0

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0 \end{cases}$$

si ottiene la cubica:

$$x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0$$

che mediante la regola di Ruffini

una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa x_0

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0 \end{cases}$$

si ottiene la cubica:

$$x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0$$

che mediante la regola di Ruffini

x_0	1	0	$-3x_0^2$	$2x_0^3$
		x_0	x_0^2	$-2x_0^3$
x_0	1	x_0	$-2x_0^2$	0
		x_0	$2x_0^2$	
	1	$2x_0$	0	

diviene:

una verifica

Mettendo a sistema la cubica e la tangente nel punto di ascissa x_0

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0 \end{cases}$$

si ottiene la cubica:

$$x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0$$

che mediante la regola di Ruffini

x_0	1	0	$-3x_0^2$	$2x_0^3$
		x_0	x_0^2	$-2x_0^3$
x_0	1	x_0	$-2x_0^2$	0
		x_0	$2x_0^2$	
	1	$2x_0$	0	

diviene:

$$(x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$$

schema operativo di Fermat

schema operativo di Fermat

- 1 Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x .

schema operativo di Fermat

- 1 Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x .

- 2 Trasformiamo l'espressione del rapporto incrementale, cercando di semplificarne i termini per h .

schema operativo di Fermat

- 1 Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x .

- 2 Trasformiamo l'espressione del rapporto incrementale, cercando di semplificarne i termini per h .
- 3 Poniamo $h = 0$ nell'espressione semplificata del rapporto incrementale ottenendo $f'(x)$, pendenza della tangente alla curva in $(x; f(x))$.

schema operativo di Fermat

- 1 Per una funzione reale nella variabile reale $y = f(x)$, costruiamo il rapporto incrementale rispetto al punto $(x; f(x))$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dove h è l'incremento (positivo o negativo) della x .

- 2 Trasformiamo l'espressione del rapporto incrementale, cercando di semplificarne i termini per h .
- 3 Poniamo $h = 0$ nell'espressione semplificata del rapporto incrementale ottenendo $f'(x)$, pendenza della tangente alla curva in $(x; f(x))$.
- 4 Al variare di x si ottiene la funzione $y = f'(x)$ che è la derivata di $y = f(x)$.

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

- 1 costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_0$$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

- ❶ costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_0$$

- ❷ trasformiamo il rapporto incrementale e semplifichiamo per h :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (\text{razionalizzando il numeratore}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (\text{semplificando per } h \neq 0) \end{aligned}$$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

- ❶ costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_0$$

- ❷ trasformiamo il rapporto incrementale e semplifichiamo per h :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (\text{razionalizzando il numeratore}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (\text{semplificando per } h \neq 0) \end{aligned}$$

- ❸ otteniamo con $h = 0$ la pendenza della tangente in $(x; \sqrt{x})$:

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

un esempio: $f(x) = \sqrt{x}$

- 1 costruiamo il rapporto incrementale per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ rispetto al punto $(x; \sqrt{x})$, con $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \text{ con } h = x - x_0$$

- 2 trasformiamo il rapporto incrementale e semplifichiamo per h :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (\text{razionalizzando il numeratore}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (\text{semplificando per } h \neq 0) \end{aligned}$$

- 3 otteniamo con $h = 0$ la pendenza della tangente in $(x; \sqrt{x})$:

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

- 4 abbiamo al variare di $x \in \mathbb{R}^+$ la funzione derivata

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

con la regola di Ruffini

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_0^n \\ x_0 & & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \hline & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & 0 \end{array}$$

diviene:

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_o^n}{x - x_o}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_o^n \\ x_o & & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^{n-1} & x_o^n \\ \hline & 1 & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^{n-1} & 0 \end{array}$$

diviene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - x_o)(x^{n-1} + x_o x^{n-2} + \cdots + x_o^{n-2} x + x_o^{n-1})}{x - x_o};$$

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_o^n}{x - x_o}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_o^n \\ x_o & & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^{n-1} & x_o^n \\ \hline & 1 & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^{n-1} & 0 \end{array}$$

diviene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - x_o)(x^{n-1} + x_o x^{n-2} + \cdots + x_o^{n-2} x + x_o^{n-1})}{x - x_o};$$

dalla forma semplificata si trae al solito modo:

$$x^{n-1} + x_o x^{n-2} + \cdots + x_o^{n-2} x + x_o^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow x_o}$$

altro esempio: $y = x^n$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n - x_o^n}{x - x_o}$$

con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_o^n \\ x_o & & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^{n-1} & x_o^n \\ \hline & 1 & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^{n-1} & 0 \end{array}$$

diviene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - x_o)(x^{n-1} + x_o x^{n-2} + \cdots + x_o^{n-2} x + x_o^{n-1})}{x - x_o};$$

dalla forma semplificata si trae al solito modo:

$$x^{n-1} + x_o x^{n-2} + \cdots + x_o^{n-2} x + x_o^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow x_o} \boxed{nx_o^{n-1}}$$

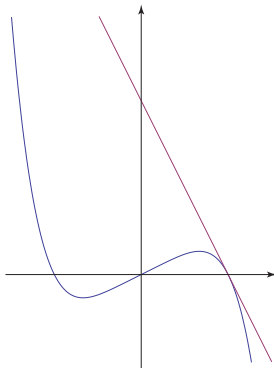
una notazione

La funzione $y = f(x)$ di dominio A è derivabile in $x \in A$ se esiste un solo $f'(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)$$

con $x+h \in A$.

$f'(x)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto $(x; f(x))$.



il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione	derivata

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

	funzione	derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

funzione		derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3	$x \mapsto \frac{1}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$x \mapsto -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

	funzione	derivata
1	$x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2	$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3	$x \mapsto \frac{1}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$x \mapsto -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
4	$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$x \mapsto \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

il calcolo con le derivate

$x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto g(x)$ funzioni reali nella variabile reale derivabili per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$

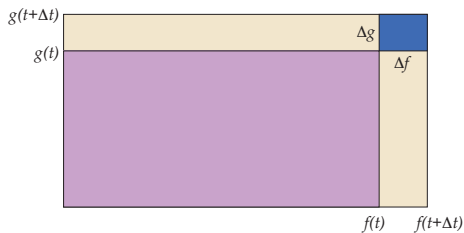
funzione	derivata
1 $x \mapsto f(x) \pm g(x)$	$x \mapsto f'(x) \pm g'(x)$
2 $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$x \mapsto f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3 $x \mapsto \frac{1}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$x \mapsto -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
4 $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$x \mapsto \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
5 $x \mapsto f(g(x))$	$x \mapsto f'(g(x)) \cdot g'(x)$

metafora per il prodotto

metafora per il prodotto



metafora per il prodotto



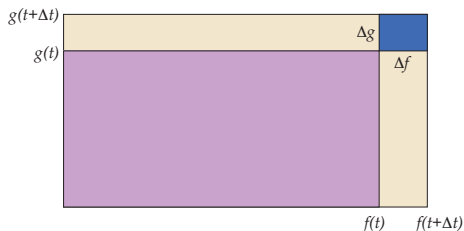
$$\frac{f(t+\Delta t) \cdot g(t+\Delta t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t}$$

metafora per il prodotto



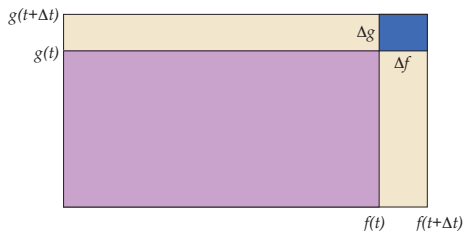
$$\begin{aligned} \frac{f(t+\Delta t) \cdot g(t+\Delta t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t} &= \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} + \\ &+ \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot [g(t + \Delta t) - g(t)] \end{aligned}$$

metafora per il prodotto



$$\begin{aligned}\frac{f(t+\Delta t) \cdot g(t+\Delta t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t} &= \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} + \\ &\quad + \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot [g(t + \Delta t) - g(t)] \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta t} + \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \Delta g\end{aligned}$$

metafora per il prodotto



$$\begin{aligned}\frac{f(t+\Delta t) \cdot g(t+\Delta t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t} &= \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} + \\ &\quad + \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot [g(t + \Delta t) - g(t)] \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta t} + \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \Delta g \\ &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \boxed{f'(t)g(t) + f(t)g'(t)}\end{aligned}$$

derivabile \implies continua

derivabile \implies continua

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x)$$

\Downarrow

derivabile \implies continua

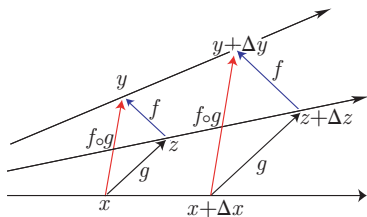
$$\begin{array}{ccc} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} & f'(x) \\ & \Downarrow & \\ f(x+\Delta x)-f(x) & = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \cdot 0 = 0 \\ & & \Downarrow \end{array}$$

derivabile \implies continua

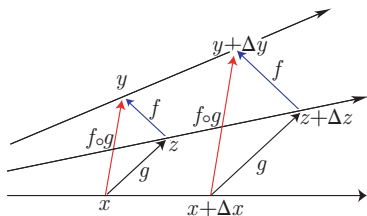
$$\begin{array}{ccc} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} & f'(x) \\ & \Downarrow & \\ f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} & f'(x) \cdot 0 = 0 \\ & \Downarrow & \\ f(x+\Delta x) & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} & f(x) \end{array}$$

derivata $f(g(x))$

derivata $f(g(x))$



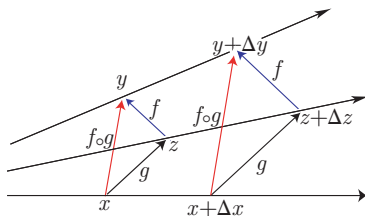
derivata $f(g(x))$



Per $\Delta x \rightarrow 0$ anche $\Delta z \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$

Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

derivata $f(g(x))$

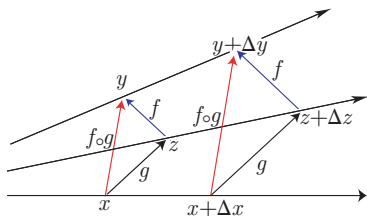


Per $\Delta x \rightarrow 0$ anche $\Delta z \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$

Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

derivata $f(g(x))$



Per $\Delta x \rightarrow 0$ anche $\Delta z \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$

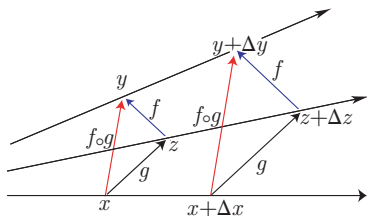
Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\ &= f'(z) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

derivata $f(g(x))$



Per $\Delta x \rightarrow 0$ anche $\Delta z \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$

Il rapporto incrementale della funzione composta si può scrivere:

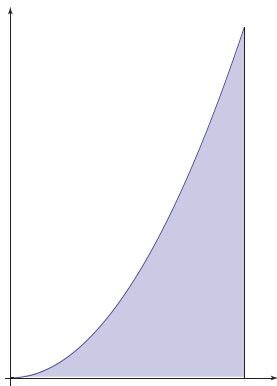
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\ &= f'(z) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

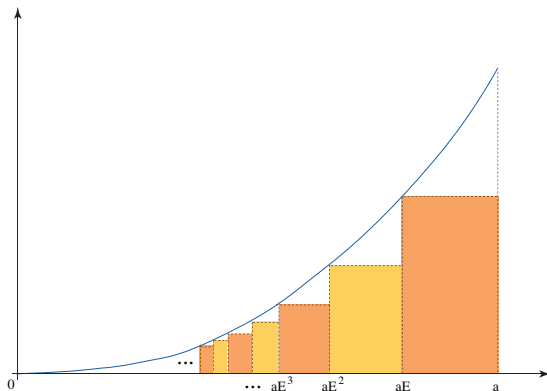
Concludendo $(f \circ g(x))' = f'(z) \cdot g'(x)$, con $z = g(x)$

parabole e iperboli di Fermat *loro quadratura*

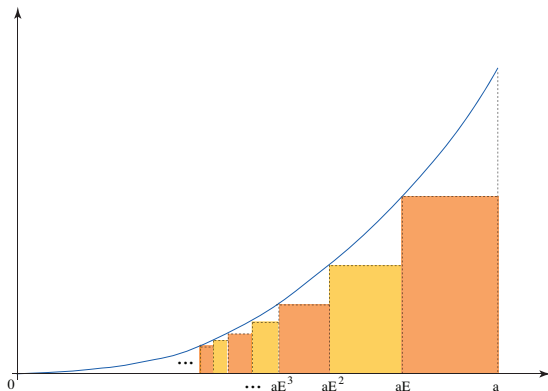


parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$

parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$

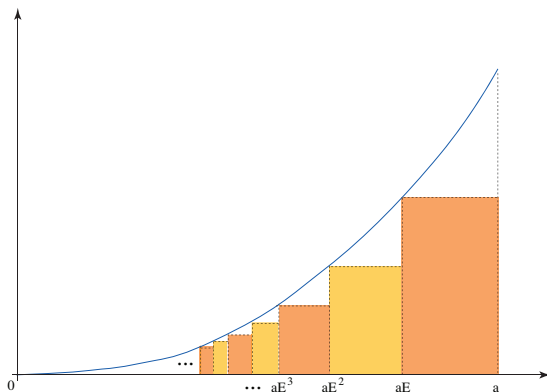


parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$



- $R_1 = (a - aE)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (1 - E)}$

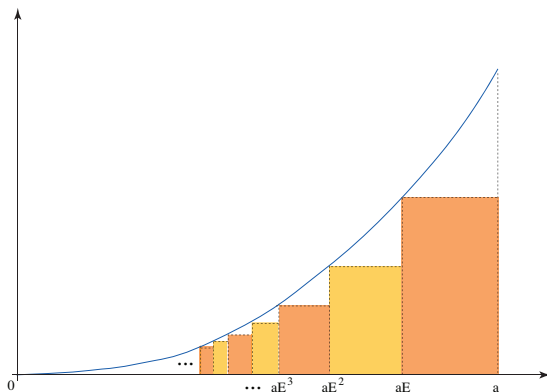
parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$



- $R_1 = (a - aE)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (1 - E)}$

- $R_2 = (aE - aE^2)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (1 - E)}$

parabole di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{N}$



- $R_1 = (a - aE)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (1 - E)}$
- $R_2 = (aE - aE^2)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (1 - E)}$
- $R_3 = (aE^2 - aE^3)a^m E^{3m} = \boxed{a^{m+1} E^{3m+2} (1 - E)}$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (1 - E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (1 - E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$



$$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1) \cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m (1 - E)}{1 - E^{m+1}}$$

parabole di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

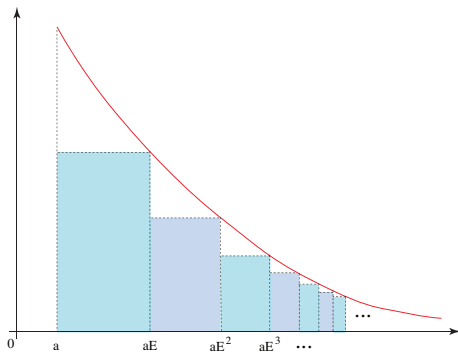
$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (1 - E)$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

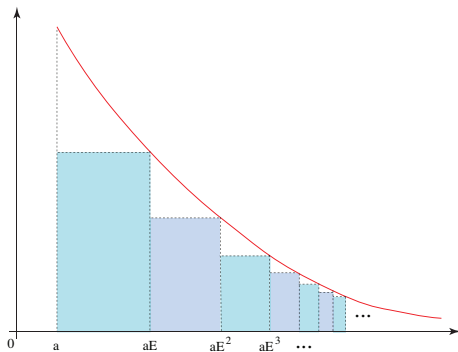
- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1) \cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m (1 - E)}{1 - E^{m+1}}$$

- $$a^{m+1} \cdot \frac{E^m (1 - E)}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1 + E + E^2 + \dots + E^m}$$

iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$

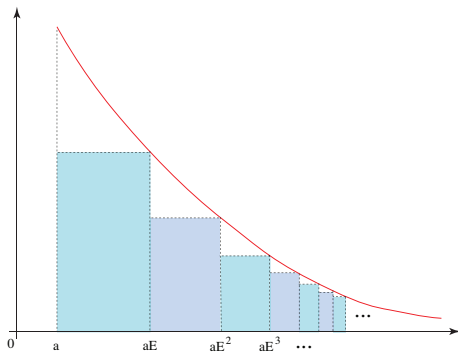


iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$



- $R_1 = (aE - a)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (E - 1)}$

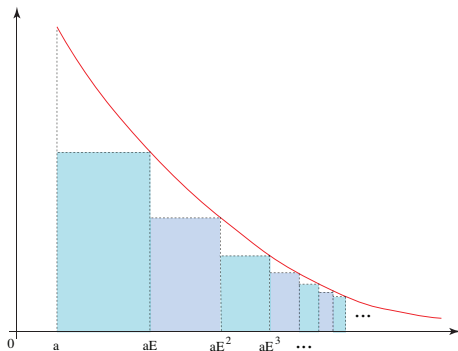
iperboli di Fermat: $f(x) = x^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$



- $R_1 = (aE - a)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (E - 1)}$

- $R_2 = (aE^2 - aE)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (E - 1)}$

iperboli di Fermat: $f(x) = x^m, \forall m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1, 0\}$



- $R_1 = (aE - a)a^m E^m = \boxed{a^{m+1} E^m (E - 1)}$

- $R_2 = (aE^2 - aE)a^m E^{2m} = \boxed{a^{m+1} E^{2m+1} (E - 1)}$

- $R_3 = (aE^3 - aE^2)a^m E^{3m} = \boxed{a^{m+1} E^{3m+2} (E - 1)}$

iperboli di Fermat

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (E - 1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (E - 1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$



$$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1) \cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m (E - 1)}{1 - E^{m+1}}$$

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (E - 1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1) \cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m (E - 1)}{1 - E^{m+1}}$$

- $$-a^{m+1} \cdot \frac{E^m (1 - E)}{1 - E^{m+1}} = -a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1 + E + E^2 + \dots + E^m}$$

iperboli di Fermat

Il plurirettangolo degli infiniti rettangoli

$$R_i = a^{m+1} E^{(m+1)i-1} (E - 1).$$

è una progressione geometrica di ragione $E^{m+1} < 1$

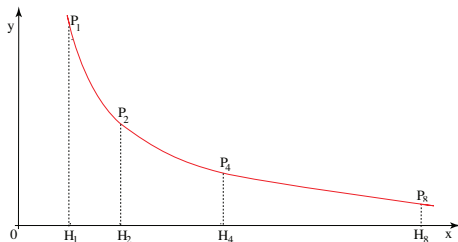
- $$S_n = R_1 \cdot \frac{1 - E^{(m+1) \cdot n}}{1 - E^{m+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_1 \cdot \frac{1}{1 - E^{m+1}} = a^{m+1} \cdot \frac{E^m (E - 1)}{1 - E^{m+1}}$$

- $$-a^{m+1} \cdot \frac{E^m (1 - E)}{1 - E^{m+1}} = -a^{m+1} \cdot \frac{E^m}{1 + E + E^2 + \dots + E^m}$$

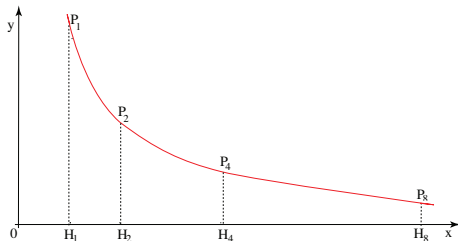
- $$-a^{m+1} \cdot \frac{1}{E^{-m} + E^{-m-1} + E^{-m-2} + \dots + 1} \xrightarrow{E \rightarrow 1^+} -\frac{a^{m+1}}{m + 1}$$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$

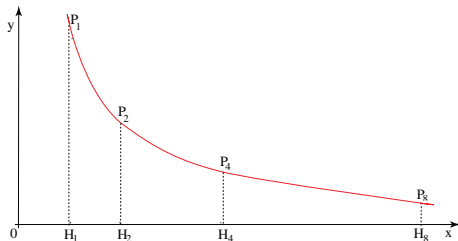


Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$



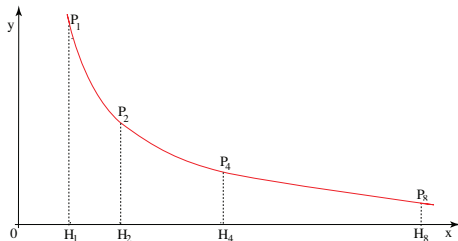
• $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$



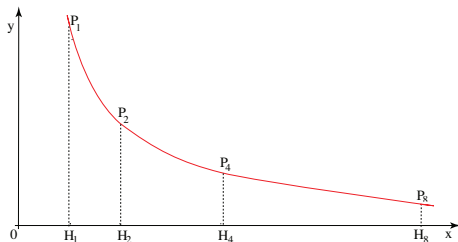
- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- l'area, a_2 , del trapezoide $H_{2^k} H_{2^{k+1}} P_{2^{k+1}} P_{2^k}$ è costante per ogni naturale k

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$



- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- l'area, a_2 , del trapezoide $H_{2^k} H_{2^{k+1}} P_{2^{k+1}} P_{2^k}$ è costante per ogni naturale k
- $area(1, 2^k) = k \cdot a_2$

Gregorio di S. Vincenzo: $f(x) = \frac{1}{x}$

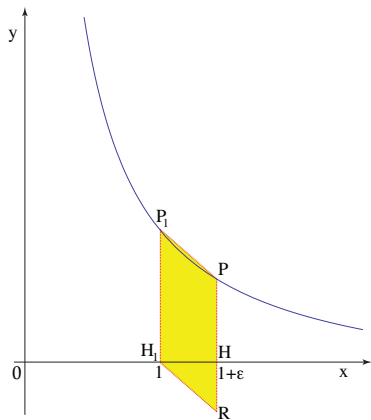


- $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto \frac{1}{2}y \end{cases}$ è un'equiaffinità perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- l'area, a_2 , del trapezoide $H_{2^k} H_{2^{k+1}} P_{2^{k+1}} P_{2^k}$ è costante per ogni naturale k
- $area(1, 2^k) = k \cdot a_2$
- $area(1, x) = a_2 \cdot \log_2 x$

quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$

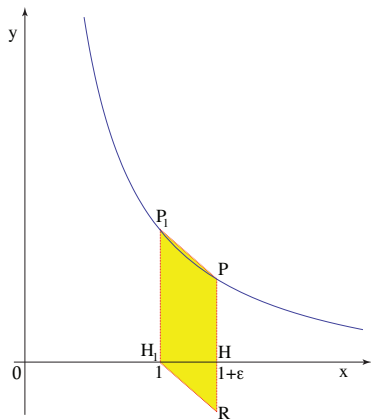


quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$

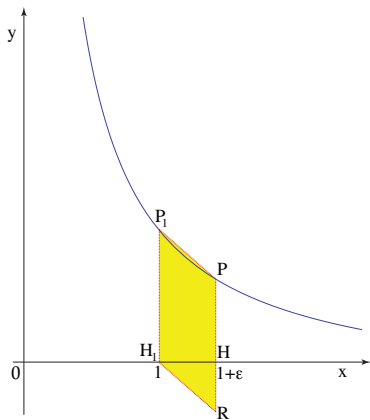
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene

$$area(1, x) = a_k \cdot \log_k x \quad \text{dove} \quad \boxed{a_k = area(1, k)}$$



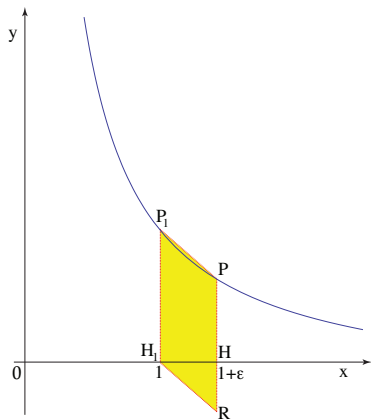
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene
 $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $a_k = area(1, k)$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$



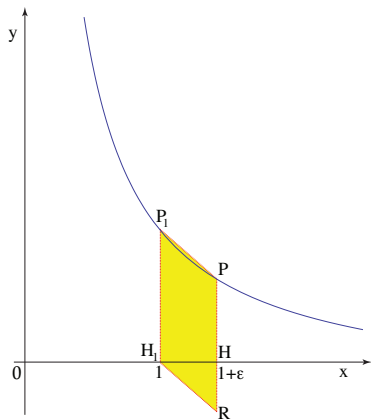
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene
 $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $a_k = area(1, k)$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx area(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$



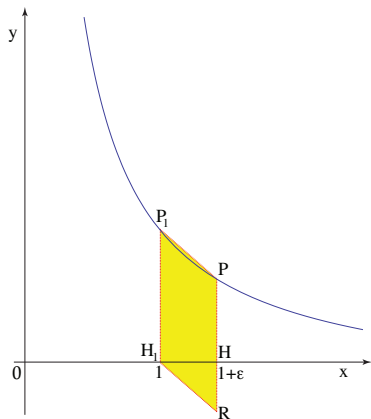
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene
 $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $a_k = area(1, k)$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx area(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$
- per una proprietà dei logaritmi $1 \approx \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$



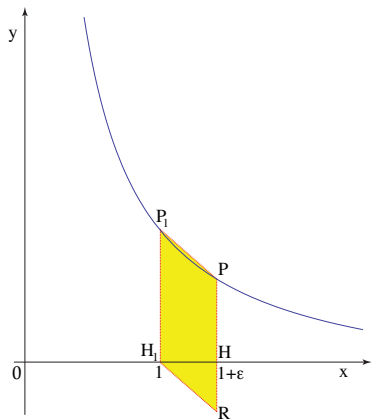
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 1$

- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $a_k = area(1, k)$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx area(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$
- per una proprietà dei logaritmi $1 \approx \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \implies k = e$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}, x > 1$

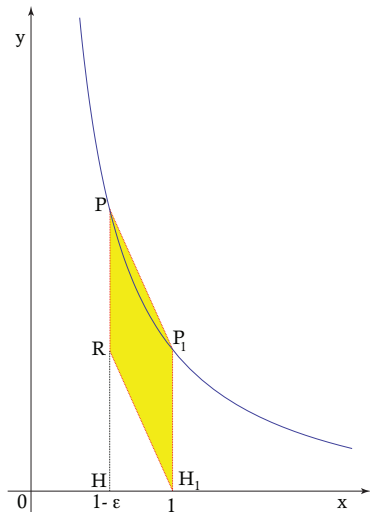
- Consideriamo la successione $1, k, k^2, \dots, k^n, \dots$ con $k > 1$
- Da $\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$ si ottiene $area(1, x) = a_k \cdot \log_k x$ dove $a_k = area(1, k)$
- troviamo $k > 1$ per cui $a_k = 1$
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx area(1, 1 + \varepsilon) = \log_k(1 + \varepsilon)$
- per una proprietà dei logaritmi $1 \approx \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_k(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \implies k = e$
- $area(1, x) = \ln x$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

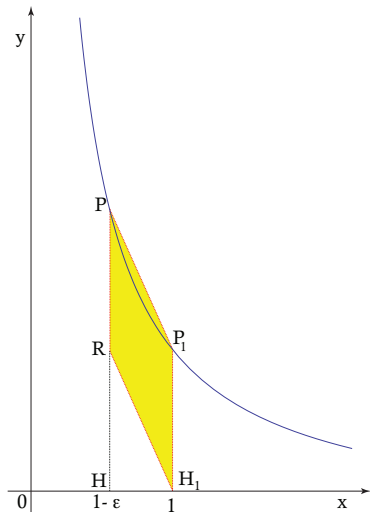
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$



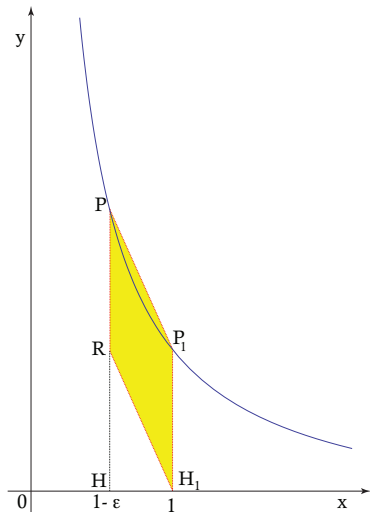
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$



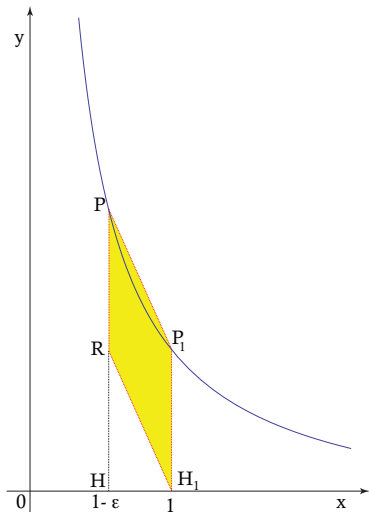
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n} \right]$ con $n \in \mathbb{N}$.



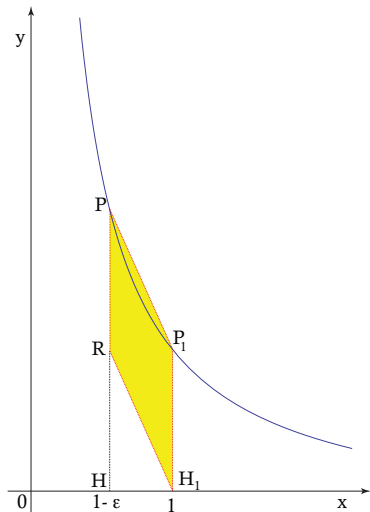
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n} \right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$



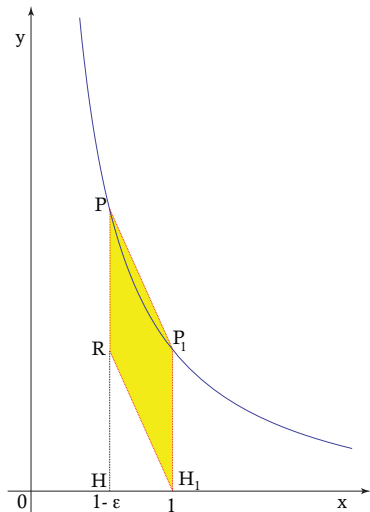
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n} \right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.



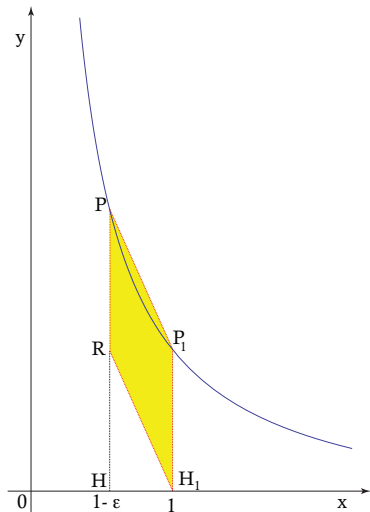
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n} \right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1 - \varepsilon)|$



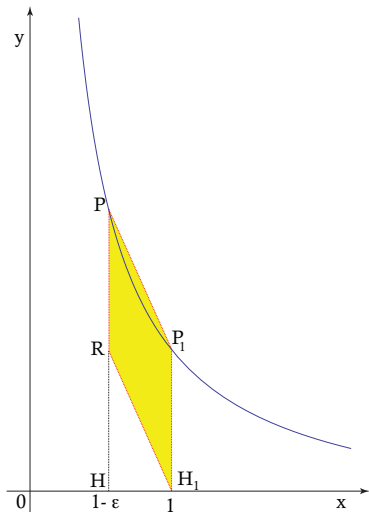
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n} \right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1 - \varepsilon)|$
- e dunque $1 \approx |\log_k(1 - \varepsilon)^\varepsilon|$



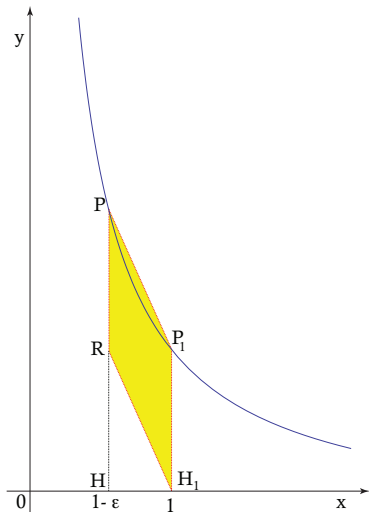
quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1 - \varepsilon)|$
- e dunque $1 \approx |\log_k(1 - \varepsilon)^\varepsilon|$
- essendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)^\varepsilon = e^{-1}$ allora
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\log_k(1 - \varepsilon)^\varepsilon| = 1 \implies k = e$$



quadratura di $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 1$

- Consideriamo la successione $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^n}, \dots$ con $k > 1$
- $$\begin{cases} x \mapsto kx \\ y \mapsto \frac{1}{k}y \end{cases}$$
- equivalenza dei trapezoidi relativi agli intervalli $\left[\frac{1}{k^{n+1}}; \frac{1}{k^n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $area(x; 1) = |\log_k x| \cdot a_k$, $\log_k x < 0$ per $0 < x < 1$
- determiniamo k in modo che $a_k = 1$.
- osserviamo che $area(P_1 H_1 R P) = \varepsilon$ e che $\varepsilon \approx |\log_k(1 - \varepsilon)|$
- e dunque $1 \approx |\log_k(1 - \varepsilon)^\varepsilon|$
- essendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)^\varepsilon = e^{-1}$ allora
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\log_k(1 - \varepsilon)^\varepsilon| = 1 \implies k = e$$
- $area(x, 1) = |\ln x|$



Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma
- la capacità di un condensatore cilindrico

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma
- la capacità di un condensatore cilindrico
- l'induttanza di un toroide

Integrale di $x \mapsto \frac{1}{x}$

In molte applicazioni della fisica è necessario

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$$

per calcolare:

- il lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma
- la capacità di un condensatore cilindrico
- l'induttanza di un toroide
- ...